LỜI GIẢI BÀI THI MÔN TOÁN VÀO LỚP 10 HÀ NỘI

Ngày thi 11 tháng 6 năm 2015

Thầy giáo Nguyễn Cao Cường – GV Tuyensinh247.com

Giáo viên môn Toán trường THCS Thái Thịnh, Quận Đống Đa, Hà Nội

Bài I. Cho $P=\frac{x+3}{\sqrt{x}-2};Q=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}\qquad x>0;x\neq 4$

1) Tính giá trị của P khi x = 9

Thay x = 9 vào P ta có: $P=\frac{9+3}{\sqrt{9}-2}=12$

2) Rút gọn Q

$$Q=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\frac{5\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$Q=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)+5\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{x-3\sqrt{x}+2+5\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$Q=\frac{x+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$Q=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

3) Tìm x để biểu thức $\frac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Ta có $\frac{P}{Q}=\frac{x+3}{\sqrt{x}-2}:\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}=\frac{x+3}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số $\sqrt{x}>0;\frac{3}{\sqrt{x}}>0$

$$\frac{P}{Q}=\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\geq 2\sqrt{\sqrt{x}.\frac{3}{\sqrt{x}}}$$

$$\frac{P}{Q}\geq 2\sqrt{3}$$

Min $\frac{P}{Q}=2\sqrt{3}$ khi $\sqrt{x}=\frac{3}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow x=3(tmdk)$

<u>Bài II.</u>

Gọi vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng là x (x>2;km/h)
Khi xuôi dòng:
Vận tốc xuôi dòng là x+2 (km/h)
Quãng đường xuôi dòng là 48 (km)

Thời gian tàu xuôi dòng là $\frac{48}{x+2}$ (km/h)

Khi ngược dòng:
Vận tốc ngược dòng là x-2 (km/h)
Quãng đường ngược dòng là 60 (km/h)

Thời gian tàu ngược dòng là $\dfrac{60}{x-2}$ (km/h)

Vì thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng là 1h nên ta có phương trình:

$$\frac{60}{x-2}-\frac{48}{x+2}=1 \Leftrightarrow 60(x+2)-48(x-2)=(x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 12x+216=x^2-4 \Leftrightarrow x^2-12x-220=0$$

Giải phương trình ta có x=22 (tm đk) ; x = -10 (loại)

Gọi vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng là 22km/h

Bài III.

1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2(x+y)+\sqrt{x+1}=4 \\ (x+y)-3\sqrt{x+1}=-5 \end{cases}$$

Điều kiện $x \ge -1$

Đặt $x+y=u; \quad \sqrt{x+1}=v \quad (v \ge 0)$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2u+v=4 \\ u-3v=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u+3v=12 \\ u-3v=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7u=7 \\ u-3v=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=2(tmdk) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ \sqrt{x+1}=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=3(\text{tmdk}) \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (3;-2)

2. Cho phương trình $x^2-(m+5)x+3m+6=0$ (1)

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi m

Ta có
$$\Delta=\left[-(m+5)\right]^2-4.1.(3m+6)=m^2+10m+25-12m-24$$
$$\Delta=m^2-2m+1=(m-1)^2 \ge 0 \forall m$$

Nên phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5.

*) Phương trình (1) có hai nghiệm là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông ⇔ (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2>0 \\ 3m+6>0 \\ m+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 1 \\ m>-2 \end{cases}$$

*) Áp dụng định lý Py-ta-go ta có

$$x_1^2+x_2^2=5^2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=25 \quad (2)$$

Áp dụng hệ thức Vi-et cho phương trình (1) ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 5 \\ x_1.x_2 = 3m + 6 \end{cases}$

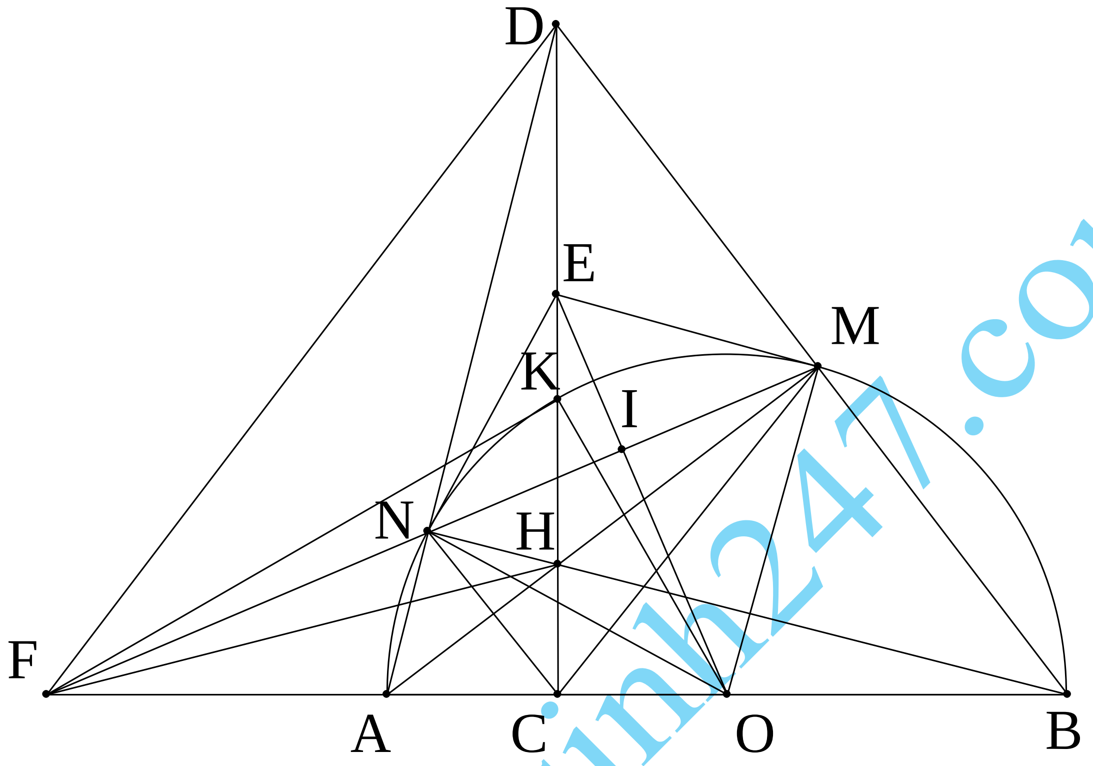
Thay vào (2) ta có:

$(m+5)^2 - 2(3m+6) = 25 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0$

Giải phương trình ta có m = 2 (tmđk); m = -6 (loại)

Vậy m = 2

Bài IV.



1) Chứng minh tứ giác ACMD là tứ giác nội tiếp

Xét (O) góc AMB = 90^0 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra góc AMD = 90^0

Mà góc ACD = 90^0 (CD⊥AB)

Xét tứ giác ACMD:

góc ACD = góc AMD = 90^0

Mà C và M là hai đỉnh kề nhau

Suy ra tứ giác ACMD là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)

2) Chứng minh CA.CB = CH.CD

Xét tam giác ACH và tam giác DCB

góc ACH = góc DCB = 90^0

góc HAC = góc CDB (cùng phụ góc ABD)

Suy ra tam giác ACH đồng dạng với tam giác DCB (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{DC} = \dfrac{CH}{CB}$ (Định nghĩa hai tam giác đồng dạng)

Suy ra CA. CB = CH. CD (đpcm)

3. Chứng minh A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của nửa đường tròn đi qua trung điểm DH.

+) AM⊥BD; DC⊥AB nên H là trực tâm tam giác ABD

⇒BH ⊥ AD tại N' suy ra góc AN'B = 90^0

+) Mà góc ANB = 90^0 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra N trùng N'. Vậy A, N, D thẳng hàng.

*) Tiếp tuyến tại N của (O) cắt DH tại E.
Ta có góc NDE = góc NBO (cùng phụ góc DAB) (1)
góc NBO = góc ONB (chứng minh tam giác ONB cân tại O) (2)
góc ONB = góc END (cùng phụ góc ENB) (3)
Từ (1), (2), (3): góc NDE = góc END
Nên tam giác NED cân tại E suy ra ED = EN
+) Ta có góc ENH + góc END = 90^0; góc EHN + EDN = 90^0
Mà góc NDE = góc END (cmt) suy ra góc ENH = góc EHN
Suy ra tam giác ENH cân tại E, suy ra EH = EN
Vậy ED= EH (=EN) nên E là trung điểm DH.

4. Khi M di động trên cung KB, chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

+) MN cắt BA tại F.
+) Chứng minh EM là tiếp tuyến của đường tròn O
Chứng minh được OE vuông góc với MN.
Tam giác OIF đồng dạng với tam giác OCE suy ra OC.OF = OI. OE
Mà OI. OE = R^2 không đổi nên OC.OF = R^2
Suy ra OF = R^2/OC không đổi nên F cố định.

Bài V. Cho a, b không âm thỏa mãn $a^2+b^2=4$. Tìm giá trị lớn nhất của $M=\dfrac{ab}{a+b+2}$

*) a và b không đồng thời bằng 0; nếu a=0 hoặc b = 0 thì M=0
*) Xét a và b khác 0:

Ta có $\dfrac{1}{M}=\dfrac{a+b+2}{ab}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{ab}$

Theo bđt Cô-si $\dfrac{a^2+b^2}{2}\ge ab \Leftrightarrow ab\le 2$ nên $\sqrt{ab}\le\sqrt{2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{ab}}\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{ab}\ge\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2}{ab}\ge 1$

+) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{a}.\dfrac{1}{b}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{2}{\sqrt{ab}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\sqrt{2}$

Từ đó $\dfrac{1}{M}\ge\sqrt{2}+1\Leftrightarrow M\le\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\Leftrightarrow M\le\sqrt{2}-1$

Vậy giá trị lớn nhất của M là $\sqrt{2}-1$ khi $a=b=\sqrt{2}$