



**B.**  $\int \left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx = 2 \int \left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right) dx.$

**C.**  $\int \left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right) dx \cdot \int \left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right) dx.$

**D.**  $\int \left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx = 4 \int x^2 dx + \int dx + \int \frac{1}{x^2} dx - 4 \int x dx - \int \frac{2}{x} dx + 4 \int dx.$

**Câu 6.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên khoảng  $(0; +\infty)$ . Khi đó  $\int \frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$  bằng:

**A.**  $\frac{1}{2}f(\sqrt{x}) + C$       **B.**  $f(\sqrt{x}) + C$       **C.**  $-2f(\sqrt{x}) + C$       **D.**  $2f(\sqrt{x}) + C$

**Câu 7.** Biết  $\int f(x) dx = 3x \cos(2x - 5) + C$ . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

**A.**  $\int f(3x) dx = 3x \cos(6x - 5) + C$       **B.**  $\int f(3x) dx = 9x \cos(6x - 5) + C$

**C.**  $\int f(3x) dx = 9x \cos(2x - 5) + C$       **D.**  $\int f(3x) dx = 3x \cos(2x - 5) + C$

**Câu 8.** Biết  $\int f(2x) dx = \sin^2 x + \ln x$ . Tìm nguyên hàm  $\int f(x) dx$ .

**A.**  $\int f(x) dx = \sin^2 \frac{x}{2} + \ln x + C.$

**B.**  $\int f(x) dx = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \ln x + C.$

**C.**  $\int f(x) dx = 2 \sin^2 x + 2 \ln x - \ln 2 + C.$

**D.**  $\int f(x) dx = 2 \sin^2 2x + 2 \ln x - \ln 2 + C.$

### Vấn đề 2. Nguyên hàm của hàm số đa thức.

**Câu 9.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^4 + x^2$  là

**A.**  $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$       **B.**  $x^4 + x^2 + C$       **C.**  $x^5 + x^3 + C.$       **D.**  $4x^3 + 2x + C$

**Câu 10.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^3 + x^2$  là

**A.**  $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$       **B.**  $3x^2 + 2x + C$       **C.**  $x^3 + x^2 + C$       **D.**  $x^4 + x^3 + C$

**Câu 11.** Tìm nguyên hàm  $\int x(x^2 + 7)^{15} dx$  ?

**A.**  $\frac{1}{2}(x^2 + 7)^{16} + C$       **B.**  $-\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C$       **C.**  $\frac{1}{16}(x^2 + 7)^{16} + C$       **D.**  $\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C$

**Câu 12.** Nếu  $\int f(x) dx = 4x^3 + x^2 + C$  thì hàm số  $f(x)$  bằng

**A.**  $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx.$

**B.**  $f(x) = 12x^2 + 2x + C.$

**C.**  $f(x) = 12x^2 + 2x.$

**D.**  $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}.$

**Câu 13.** Nguyên hàm của hàm số  $x^3 + x^2$  ?

**A.**  $3x^2 + 2x + C.$       **B.**  $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C.$       **C.**  $x^4 + x^3 + C.$       **D.**  $4x^4 + 3x^3 + C.$

**Câu 14.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2019$  là

A.  $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C.$

B.  $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2019x + C.$

C.  $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2019x + C.$

D.  $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2019x + C.$

**Câu 15.** Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số  $y = x^{2019}$ ?

A.  $\frac{x^{2020}}{2020} + 1.$

B.  $\frac{x^{2020}}{2020}.$

C.  $y = 2019x^{2018}.$

D.  $\frac{x^{2020}}{2020} - 1.$

**Câu 16.** Tìm nguyên  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$ ?

A.  $F(x) = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + C.$

B.  $F(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + C.$

C.  $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C.$

D.  $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 6x + C.$

**Câu 17.** Họ các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = (2x+3)^5$  là

A.  $F(x) = \frac{(2x+3)^6}{12} + C.$

B.  $F(x) = \frac{(2x+3)^6}{6} + C.$

C.  $F(x) = 10(2x+3)^4 + C.$

D.  $F(x) = 5(2x+3)^4 + C.$

**Câu 18.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^3(x^2+1)^{2019}$  là

A.  $\frac{1}{2} \left[ \frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} \right].$

B.  $\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020}.$

C.  $\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} + C.$

D.  $\frac{1}{2} \left[ \frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} \right] + C.$

**Câu 19.** Biết rằng hàm số  $F(x) = mx^3 + (3m+n)x^2 - 4x + 3$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$ . Tính  $mn$ .

A.  $mn = 1.$

B.  $mn = 2.$

C.  $mn = 0.$

D.  $mn = 3.$

**Vấn đề 3. Nguyên hàm của hàm số hữu tỉ.**

**Câu 20.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$ .

A.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C.$

B.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$

C.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$

D.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$

**Câu 21.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{5x-2}$ .

A.  $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$

B.  $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$

C.  $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln |5x-2| + C$

D.  $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln |5x-2| + C$

**Câu 22.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$ .

A.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$ .

B.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$ .

C.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$ .

D.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$ .

**Câu 23.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{1-2x}$  trên  $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ .

A.  $\frac{1}{2} \ln |2x-1| + C$ .    B.  $\frac{1}{2} \ln (1-2x) + C$ .    C.  $-\frac{1}{2} \ln |2x-1| + C$ .    D.  $\ln |2x-1| + C$ .

**Câu 24.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{2x} + C$ .

B.  $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$ .

C.  $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C$ .

D.  $\int f(x) dx = 2x^3 - \frac{3}{x} + C$ .

**Câu 25.** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$  trên khoảng  $(2; +\infty)$  là

A.  $3 \ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C$

B.  $3 \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + C$

C.  $3 \ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C$

D.  $3 \ln(x-2) + \frac{4}{x-2} + C$ .

**Câu 26.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  trên khoảng  $(1; +\infty)$  thỏa mãn  $F(e+1) = 4$

Tìm  $F(x)$ .

A.  $2 \ln(x-1) + 2$

B.  $\ln(x-1) + 3$

C.  $4 \ln(x-1)$

D.  $\ln(x-1) - 3$

**Câu 27.** Cho biết  $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln|x+1| + b \ln|x-2| + C$ .

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $a + 2b = 8$ .

B.  $a + b = 8$ .

C.  $2a - b = 8$ .

D.  $a - b = 8$ .

**Câu 28.** Cho biết  $\int \frac{1}{x^3-x} dx = a \ln|(x-1)(x+1)| + b \ln|x| + C$ . Tính giá trị biểu thức:  $P = 2a + b$ .

A. 0.

B. -1.

C.  $\frac{1}{2}$ .

D. 1.

**Câu 29.** Cho biết  $\int \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = a \ln|x+2| + b \ln|x+3| + C$ . Tính giá trị biểu thức:

$P = a^2 + ab + b^2$ .

A. 12.

B. 13.

C. 14.

D. 15.

**Câu 30.** Tìm tất cả các họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^9 + 3x^5}$

$$\text{A. } \int f(x) dx = -\frac{1}{3x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$$

$$\text{B. } \int f(x) dx = -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$$

$$\text{C. } \int f(x) dx = -\frac{1}{3x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$$

$$\text{D. } \int f(x) dx = -\frac{1}{12x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$$

**Câu 31.** Tìm hàm số  $F(x)$  biết  $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$  và  $F(0) = 1$ .

$$\text{A. } F(x) = \ln(x^4 + 1) + 1.$$

$$\text{B. } F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \frac{3}{4}.$$

$$\text{C. } F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + 1.$$

$$\text{D. } F(x) = 4 \ln(x^4 + 1) + 1.$$

**Câu 32.** Biết  $\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \frac{1}{a} \cdot \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^b + C$ ,  $x \neq -1$  với  $a, b \in \mathbb{N}^*$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

$$\text{A. } a = 2b.$$

$$\text{B. } b = 2a.$$

$$\text{C. } a = 2018b.$$

$$\text{D. } b = 2018a.$$

**Câu 33.** Đổi biến  $t = x - 1$  thì  $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx$  trở thành

$$\text{A. } \int \frac{t-1}{t^4} dt.$$

$$\text{B. } \int \frac{(t+1)^4}{t} dt.$$

$$\text{C. } \int \frac{t+1}{t^4} dt.$$

$$\text{D. } \int \frac{t+1}{t} dt.$$

**Câu 34.** Cho  $I = \int \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx = \frac{-a}{x^2} - b \ln|x| + 2c \ln(1+x^2) + C$ . Khi đó  $S = a + b + c$  bằng

$$\text{A. } \frac{-1}{4}.$$

$$\text{B. } \frac{3}{4}.$$

$$\text{C. } \frac{7}{4}.$$

$$\text{D. } 2.$$

#### Vấn đề 4. Nguyên hàm của hàm số chứa căn.

**Câu 35.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{2x-1}$ .

$$\text{A. } \int f(x) dx = \frac{2}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C.$$

$$\text{B. } \int f(x) dx = \frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C.$$

$$\text{C. } \int f(x) dx = -\frac{1}{3} \sqrt{2x-1} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x) dx = \frac{1}{2} \sqrt{2x-1} + C.$$

**Câu 36.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x-1}}$  có dạng:

$$\text{A. } \int f(x) dx = \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} + C.$$

$$\text{B. } \int f(x) dx = \sqrt{2x+1} + C.$$

$$\text{C. } \int f(x) dx = 2\sqrt{2x+1} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x) dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C.$$

**Câu 37.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$  là

$$\text{A. } \int f(x) dx = (3x+1) \sqrt[3]{3x+1} + C.$$

$$\text{B. } \int f(x) dx = \sqrt[3]{3x+1} + C.$$

$$\text{C. } \int f(x) dx = \frac{1}{3} \sqrt[3]{3x+1} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x) dx = \frac{1}{4} (3x+1) \sqrt[3]{3x+1} + C.$$

**Câu 38.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{3x+2}$  là

A.  $\frac{2}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C$

B.  $\frac{1}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C$

C.  $\frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C$

D.  $\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3x+2}} + C$

**Câu 39.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{2x+1}$  là

A.  $-\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

B.  $\frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

C.  $\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

D.  $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

**Câu 40.** Khi tính nguyên hàm  $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$ , bằng cách đặt  $u = \sqrt{x+1}$  ta được nguyên hàm nào?

A.  $\int 2(u^2-4) du.$

B.  $\int (u^2-4) du.$

C.  $\int (u^2-3) du.$

D.  $\int 2u(u^2-4) du.$

**Câu 41.** Biết  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+2} + (x+2)\sqrt{x}} = a\sqrt{x} - b\sqrt{x+2} + C$  với  $a, b$  là các số nguyên dương và  $C$  là

hằng số thực. Giá trị của biểu thức  $P = a + b$  là:

A.  $P = 2$

B.  $P = 8$

C.  $P = 46$

D.  $P = 22$

**Câu 42.** Nguyên hàm  $P = \int x\sqrt[3]{x^2+1} dx$  là:

A.  $P = \frac{3}{8}(x^2+1)\sqrt[3]{x^2+1} + C$

B.  $P = \frac{3}{8}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$

C.  $P = \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^2+1} + C$

D.  $P = \frac{3}{4}(x^2+1)\sqrt[3]{x^2+1} + C$

**Câu 43.** Nguyên hàm  $R = \int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$  là:

A.  $R = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \right| + C$

B.  $R = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$

C.  $R = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \right| + C$

D.  $R = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$

**Câu 44.** Nguyên hàm  $S = \int x^3\sqrt{x^2+9} dx$  là:

A.  $S = \frac{(x^2+9)^2\sqrt{x^2+9}}{5} - 3(x^2+9)\sqrt{x^2+9} + C$

B.  $S = \frac{(x^2+9)^4\sqrt{x^2+9}}{5} - 3(x^2+9)\sqrt{x^2+9} + C$

C.  $S = \frac{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}{5} - 3(x^2+9)^2\sqrt{x^2+9} + C$

$$\text{D. } S = \frac{(x^2 + 9)^2 \sqrt{x^2 + 9}}{5} - 3\sqrt{x^2 + 9} + C$$

**Câu 45.** Nguyên hàm  $I = \int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$  là:

A.  $\sqrt[3]{(1-x^2)^2} + C$       B.  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$       C.  $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} + C$       D.  $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$

**Câu 46.** Cho  $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$ . Bằng phép đổi biến  $u = \sqrt{x^2+1}$ , khẳng định nào sau đây **sai**?

A.  $x^2 = u^2 - 1$       B.  $xdx = udu$       C.  $I = \int (u^2 - 1) \cdot udu$       D.  $I = \frac{u^3}{3} - u + C$

**Câu 47.** Cho  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(2\sqrt{x^2+1} + 5)$ , biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  thỏa mãn

$F(0) = 6$ . Giá trị của  $F\left(\frac{3}{4}\right)$  là:

A.  $\frac{125}{16}$       B.  $\frac{126}{16}$       C.  $\frac{123}{16}$       D.  $\frac{127}{16}$

**Câu 48.** Nguyên hàm  $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$  là:

A.  $I = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C$       B.  $I = \frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C$   
 C.  $I = \frac{\sqrt{9-x^2}}{9x^2} + C$       D.  $I = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x^2} + C$

**Câu 49.** Nguyên hàm  $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$  là:

A.  $I = -\frac{1}{3}(x^2 - 2)\sqrt{1+x^2} + C$       B.  $I = \frac{1}{3}(x^2 - 2)\sqrt{1+x^2} + C$   
 C.  $I = -\frac{1}{3}(x^2 + 2)\sqrt{1+x^2} + C$       D.  $I = \frac{1}{3}(x^2 + 2)\sqrt{1+x^2} + C$

### Vấn đề 5. Nguyên hàm của hàm số lượng giác.

**Câu 50.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2 \sin x$ .

A.  $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$       B.  $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C$   
 C.  $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C$       D.  $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C$

**Câu 51.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos 3x$

A.  $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$       B.  $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

C.  $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$

D.  $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$

**Câu 52.** Họ nguyên hàm của hàm số  $y = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$  là:

A.  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

B.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

C.  $\int f(x) dx = \frac{1}{6} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

D.  $\int f(x) dx = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + C$

**Câu 53.** Phát biểu nào sau đây đúng?

A.  $\int \sin 2x dx = \frac{\cos 2x}{2} + C, C \in \mathbb{R}$

B.  $\int \sin 2x dx = \cos 2x + C, C \in \mathbb{R}$

C.  $\int \sin 2x dx = 2 \cos 2x + C, C \in \mathbb{R}$

D.  $\int \sin 2x dx = \frac{-\cos 2x}{2} + C, C \in \mathbb{R}$

**Câu 54.** Biết  $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = x + \frac{a}{b} \cos 4x + C$ , với  $a, b$  là các số nguyên dương,  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản và  $C \in \mathbb{R}$ . Giá trị của  $a + b$  bằng:

A. 5.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

**Câu 55.** Nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \cos 3x \cos x$ , biết đồ thị  $y = F(x)$  đi qua gốc tọa độ là:

A.  $F(x) = \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2}$

B.  $F(x) = \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 2x}{2}$

C.  $F(x) = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{4}$

D.  $F(x) = \frac{\sin 8x}{8} + \frac{\sin 4x}{4}$

**Câu 56.** Biết  $\int (\cos^2 x - \sin^2 x)^5 \sin 4x dx = -\frac{\cos^m nx}{p} + C$ , với  $m, n, p \in \mathbb{Z}$  và  $C$  là hằng số thực. Giá trị của biểu thức  $T = m + n + p$  là:

A.  $T = 9$

B.  $T = 14$

C.  $T = 16$

D.  $T = 18$

**Câu 57.** Nguyên hàm  $M = \int \frac{2 \sin x}{1 + 3 \cos x} dx$  là:

A.  $M = \frac{1}{3} \ln(1 + 3 \cos x) + C$

B.  $M = \frac{2}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$

C.  $M = -\frac{2}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$

D.  $M = -\frac{1}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C$

**Câu 58.** Gọi  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x$  thỏa  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ . Giá trị  $F(2019\pi)$  là:

A.  $F(2019\pi) = -\frac{1}{15}$

B.  $F(2019\pi) = 0$

C.  $F(2019\pi) = -\frac{2}{15}$

D.  $F(2019\pi) = \frac{1}{15}$

**Câu 59.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \sin x + \cos x$  thỏa mãn  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ .



A.  $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$

B.  $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$

C.  $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$

D.  $F(x) = \cos x - \sin x + 3$

**Câu 60.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = -\cos x$  và  $f(0) = 2020$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $f(x) = -\sin x + 2020$

B.  $f(x) = \cos x + 2020$

C.  $f(x) = \sin x + 2020$ .

D.  $f(x) = 2020 - \cos x$

**Câu 61.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3 \sin^2 x \cos x$  là

A.  $\sin^3 x + C$ .

B.  $-\sin^3 x + C$ .

C.  $\cos^3 x + C$ .

D.  $-\cos^3 x + C$ .

**Câu 62.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$ .

A.  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos x| + C$ .

B.  $\int f(x) dx = \ln |1 + 3 \cos x| + C$ .

C.  $\int f(x) dx = 3 \ln |1 + 3 \cos x| + C$ .

D.  $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos x| + C$ .

**Câu 63.** Tìm các hàm số  $f(x)$  biết  $f'(x) = \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2}$ .

A.  $f(x) = \frac{\sin x}{(2 + \sin x)^2} + C$ .

B.  $f(x) = \frac{1}{(2 + \cos x)} + C$ .

C.  $f(x) = -\frac{1}{2 + \sin x} + C$ .

D.  $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x} + C$ .

**Câu 64.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \tan^5 x$ .

A.  $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C$ .

B.  $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C$ .

C.  $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C$ .

D.  $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C$ .

**Câu 65.** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}$  và  $F(0) = 2$ . Giá trị của  $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

là:

A.  $\frac{2\sqrt{2} - 8}{3}$

B.  $\frac{2\sqrt{2} + 8}{3}$

C.  $\frac{4\sqrt{2} - 8}{3}$

D.  $\frac{4\sqrt{2} + 8}{3}$

**Câu 66.** Cho nguyên hàm  $I = \int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$ . Nếu  $u = \cos 2x$  đặt thì mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $I = \int \frac{-1}{u^2 + 1} du$

B.  $I = \int \frac{1}{2u^2 + 1} du$

C.  $I = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 + 1} du$

D.  $I = \int \frac{2}{u^2 + 1} du$

**Câu 67.** Cho  $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x + 2)^3} dx = -\frac{(\sin x + \cos x + 1)^m}{(\sin x + \cos x + 2)^n} + C$ , với  $m, n \in \mathbb{N}$  và  $C$  là hằng số

thực. Giá trị của biểu thức  $A = m + n$  là:

- A.  $A = 5$                       B.  $A = 2$                       C.  $A = 3$                       D.  $A = 4$

**Vấn đề 6. Nguyên hàm của hàm số mũ, logarit.**

**Câu 68.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 7^x$ .

- A.  $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$                       B.  $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$   
 C.  $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$                       D.  $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$

**Câu 69.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{3x}$  là hàm số nào sau đây?

- A.  $3e^x + C$ .                      B.  $\frac{1}{3}e^{3x} + C$ .                      C.  $\frac{1}{3}e^x + C$ .                      D.  $3e^{3x} + C$ .

**Câu 70.** Nguyên hàm của hàm số  $y = e^{2x-1}$  là

- A.  $2e^{2x-1} + C$ .                      B.  $e^{2x-1} + C$ .                      C.  $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C$ .                      D.  $\frac{1}{2}e^x + C$ .

**Câu 71.** Tính  $F(x) = \int e^2 dx$ , trong đó  $e$  là hằng số và  $e \approx 2,718$ .

- A.  $F(x) = \frac{e^2 x^2}{2} + C$ .                      B.  $F(x) = \frac{e^3}{3} + C$ .                      C.  $F(x) = e^2 x + C$ .                      D.  $F(x) = 2ex + C$ .

**Câu 72.** Hàm số  $F(x) = e^{x^2}$  là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau:

- A.  $f(x) = 2xe^{x^2}$ .                      B.  $f(x) = x^2 e^{x^2} - 1$ .                      C.  $f(x) = e^{2x}$ .                      D.  $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$ .

**Câu 73.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2^x (2^{-x} + 5)$  là

- A.  $x + 5 \left( \frac{2^x}{\ln 2} \right) + C$ .                      B.  $x + 5 \cdot 2^x \ln 2 + C$ .  
 C.  $\frac{2^x}{\ln 2} \left( -\frac{2^x}{\ln 2} x + 5x \right) + C$ .                      D.  $1 + 5 \left( \frac{2^x}{\ln 2} \right) + C$ .

**Câu 74.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{2e^x + 3}$  thỏa mãn  $F(0) = 10$ . Hàm số  $F(x)$

là:

- A.  $\frac{1}{3} \left( x - \ln(2e^x + 3) \right) + 10 + \frac{\ln 5}{3}$                       B.  $\frac{1}{3} \left( x + 10 - \ln(2e^x + 3) \right)$   
 C.  $\frac{1}{3} \left( x - \ln \left( 2e^x + \frac{3}{2} \right) \right) + \ln 5 - \ln 2$                       D.  $\frac{1}{3} \left( x - \ln(2e^x + 3) \right) + 10 + \frac{\ln 5 - \ln 2}{3}$

**Câu 75.** Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và:  $f'(x) = 2e^{2x} + 1, \forall x, f(0) = 2$ . Hàm  $f(x)$  là

- A.  $y = 2e^x + 2x$ .                      B.  $y = 2e^x + 2$ .                      C.  $y = e^{2x} + x + 2$ .                      D.  $y = e^{2x} + x + 1$ .

**Câu 76.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  là:

- A.  $\frac{\ln^2 x}{2} + C$       B.  $\frac{1 - \ln x}{x^2} + C$       C.  $\frac{\ln x}{2} + C$       D.  $\ln^2 x + C$

**Câu 77.** Nguyên hàm  $T = \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx$  là:

- A.  $T = \frac{1}{2\sqrt{\ln x + 1}} + C$       B.  $T = 2\sqrt{\ln x + 1} + C$   
 C.  $T = \frac{2}{3}(\ln x + 1)\sqrt{\ln x + 1} + C$       D.  $T = \sqrt{\ln x + 1} + C$

**Câu 78.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+1}$ .

- A.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} \cdot e^{x^3+1} + C$       B.  $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C$   
 C.  $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C$       D.  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C$

**Câu 79.** Nguyên hàm của  $f(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$  là

- A.  $\sin^2 x \cdot e^{\sin^2 x - 1} + C$       B.  $\frac{e^{\sin^2 x + 1}}{\sin^2 x + 1} + C$       C.  $e^{\sin^2 x} + C$       D.  $\frac{e^{\sin^2 x - 1}}{\sin^2 x - 1} + C$

**Câu 80.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  là

- A.  $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \sqrt{x^2 + 1} + C$       B.  $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C$   
 C.  $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$       D.  $F(x) = x^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$

**Câu 81.** Xét nguyên hàm  $V = \int \frac{\ln^2 x}{x(1 + \sqrt{\ln x + 1})} dx$ . Đặt  $u = 1 + \sqrt{1 + \ln x}$ , khẳng định nào sau đây

sai?

- A.  $\frac{dx}{x} = (2u - 2) du$       B.  $V = \int \frac{(u^2 - 2u)^2}{u} \cdot (2u - 2) du$   
 C.  $V = \frac{2}{5} u^5 - \frac{5}{2} u^4 + \frac{16}{3} u^3 - 4u^2 + C$       D.  $V = \frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{2} - \frac{16}{3} u^3 + 4u^2 + C$

**Câu 82.** Cho hàm số  $f(x) = 2x^2 e^{x^3+2} + 2xe^{2x}$ , ta có  $\int f(x) dx = me^{x^3+2} + nxe^{2x} - pe^{2x} + C$ . Giá trị của biểu thức  $m + n + p$  bằng

- A.  $\frac{1}{3}$       B. 2      C.  $\frac{13}{6}$       D.  $\frac{7}{6}$

**Vấn đề 7. Nguyên hàm tổng hợp.**

**Câu 83.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x + x$  là

- A.  $e^x + 1 + C$       B.  $e^x + x^2 + C$       C.  $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$       D.  $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$

**Câu 84.** Tính  $\int (x - \sin 2x) dx$ .

- A.  $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$ .      B.  $\frac{x^2}{2} + \cos 2x + C$ .      C.  $x^2 + \frac{\cos 2x}{2} + C$ .      D.  $\frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + C$ .

**Câu 85.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$ .

- A.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$ .      B.  $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$ .  
 C.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$ .      D.  $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$ .

**Câu 86.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + \sin x$  là

- A.  $x^3 + \cos x + C$ .      B.  $6x + \cos x + C$ .      C.  $x^3 - \cos x + C$ .      D.  $6x - \cos x + C$ .

**Câu 87.** Công thức nào sau đây là **sai**?

- A.  $\int \ln x \, dx = \frac{1}{x} + C$ .      B.  $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$ .  
 C.  $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ .      D.  $\int e^x \, dx = e^x + C$ .

**Câu 88.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.  $\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$ .      B.  $\int x^e \, dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C$ .  
 C.  $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$ .      D.  $\int e^x \, dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C$ .

**Câu 89.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$  là

- A.  $\ln x - \cos x + C$ .      B.  $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C$ .      C.  $\ln|x| + \cos x + C$ .      D.  $\ln|x| - \cos x + C$ .

**Câu 90.** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^x \left( 2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$ .

- A.  $\int f(x) \, dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C$ .      B.  $\int f(x) \, dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C$ .  
 C.  $\int f(x) \, dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$ .      D.  $\int f(x) \, dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C$ .

**Câu 91.** Họ nguyên hàm của hàm số  $y = e^x \left( 2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$  là

- A.  $2e^x + \tan x + C$       B.  $2e^x - \tan x + C$       C.  $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C$       D.  $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C$

**Câu 92.** Hàm số  $F(x) = x^2 \ln(\sin x - \cos x)$  là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

- A.  $f(x) = \frac{x^2}{\sin x - \cos x}$ .  
 B.  $f(x) = 2x \ln(\sin x - \cos x) + \frac{x^2(\cos x + \sin x)}{\sin x - \cos x}$ .  
 C.  $f(x) = \frac{x^2(\sin x + \cos x)}{\sin x - \cos x}$ .

D.  $f(x) = 2x \ln(\sin x - \cos x) + \frac{x^2}{\sin x - \cos x}$ .

**Câu 93.** Cho hàm số  $f(x) = 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$ . Hàm số nào dưới đây **không** là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ ?

A.  $F(x) = 2^{\sqrt{x}} + C$

B.  $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C$

C.  $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C$

D.  $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + C$

**Câu 94.** Tìm họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$

A.  $\int \left( -t^{-5} + 2t^{-3} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{4}t^{-4} - t^{-2} - \ln|t| + C$ .

B.  $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C$ .

C.  $\int f(x) dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$ .

D.  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3}e^{x^3+1} + C$ .

**Câu 95.** Biết  $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$  với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính tích  $ab$ ?

A.  $ab = \frac{1}{8}$ .

B.  $ab = \frac{1}{4}$ .

C.  $ab = -\frac{1}{8}$ .

D.  $ab = -\frac{1}{4}$ .

**Câu 96.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 4x(1 + \ln x)$  là:

A.  $2x^2 \ln x + 3x^2$ .

B.  $2x^2 \ln x + x^2$ .

C.  $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$ .

D.  $2x^2 \ln x + x^2 + C$ .

**Câu 97.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x e^{2x}$  là:

A.  $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C$

B.  $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} (x - 2) + C$

C.  $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C$

D.  $F(x) = 2e^{2x} \left( x - \frac{1}{2} \right) + C$

**Câu 98.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2x(1 + e^x)$  là

A.  $(2x - 1)e^x + x^2$ .

B.  $(2x + 1)e^x + x^2$ .

C.  $(2x + 2)e^x + x^2$ .

D.  $(2x - 2)e^x + x^2$ .

**Câu 99.** Họ nguyên hàm của  $f(x) = x \ln x$  là kết quả nào sau đây?

A.  $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{2} x^2 + C$ .

B.  $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C$ .

C.  $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$ .

D.  $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x + C$ .

**Câu 100.** Tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$  trên khoảng  $(0; \pi)$  là

A.  $-x \cot x + \ln|\sin x| + C$ .

B.  $x \cot x - \ln|\sin x| + C$ .

C.  $x \cot x + \ln|\sin x| + C$ .

D.  $-x \cot x - \ln(\sin x) + C$ .

**Câu 101.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^4 + xe^x$  là

- A.  $\frac{1}{5}x^5 + (x+1)e^x + C$ .      B.  $\frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C$ .  
C.  $\frac{1}{5}x^5 + xe^x + C$ .      D.  $4x^3 + (x+1)e^x + C$ .

**Câu 102.** Họ nguyên hàm của hàm số  $y = \frac{(2x^2 + x)\ln x + 1}{x}$  là

- A.  $(x^2 + x + 1)\ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$ .      B.  $(x^2 + x - 1)\ln x + \frac{x^2}{2} - x + C$ .  
C.  $(x^2 + x + 1)\ln x - \frac{x^2}{2} - x + C$ .      D.  $(x^2 + x - 1)\ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$ .

**Câu 103.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = xe^x$  và  $f(0) = 2$ . Tính  $f(1)$ .

- A.  $f(1) = 3$ .      B.  $f(1) = e$ .      C.  $f(1) = 5 - e$ .      D.  $f(1) = 8 - 2e$ .

**Câu 104.** Gọi  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = xe^{-x}$ . Tính  $F(x)$  biết  $F(0) = 1$ .

- A.  $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$ .      B.  $F(x) = (x+1)e^{-x} + 1$ .  
C.  $F(x) = (x+1)e^{-x} + 2$ .      D.  $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$ .

**Câu 105.** Biết  $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$  với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính tích  $ab$ ?

- A.  $ab = \frac{1}{8}$ .      B.  $ab = \frac{1}{4}$ .      C.  $ab = -\frac{1}{8}$ .      D.  $ab = -\frac{1}{4}$ .

**Câu 106.** Biết  $F(x) = -\frac{(x-a)\cos 3x}{b} + \frac{1}{c}\sin 3x + 2019$  là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = (x-2)\sin 3x$ , (với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ). Giá trị của  $ab + c$  bằng

- A. 14.      B. 15.      C. 10.      D. 18.

**Câu 107.** Cho hàm số  $f(x) = 2x^2e^{x^3+2} + 2xe^{2x}$ , ta có  $\int f(x) dx = me^{x^3+2} + nxe^{2x} - pe^{2x} + C$ . Giá trị của biểu thức  $m + n + p$  bằng

- A.  $\frac{1}{3}$       B. 2      C.  $\frac{13}{6}$       D.  $\frac{7}{6}$

**Câu 108.** Cho hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = 2019^x(x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2)$ . Khi đó số điểm cực trị của hàm số  $F(x)$  là

- A. 5.      B. 4.      C. 3.      D. 2.

**Câu 109.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$ . Hàm số  $F(x^2 + x)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 6.      B. 5.      C. 3.      D. 4.

### Vấn đề 8. Nguyên hàm của hàm ẩn

**Câu 110.** Hàm số  $F(x)$  nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số  $f(x).g(x)$ , biết  $F(1) = 3$ ,

$\int f(x) dx = x + C_1$  và  $\int g(x) dx = x^2 + C_2$ .

- A.  $F(x) = x^2 + 1$       B.  $F(x) = x^2 + 3$       C.  $F(x) = x^2 + 2$       D.  $F(x) = x^2 + 4$

**Câu 111.** Cho  $\int f(x) dx = 4x^3 + 2x + C_0$ . Tính  $I = \int xf(x^2) dx$ .

- A.  $I = 2x^6 + x^2 + C$ .    B.  $I = \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^6}{6} + C$ .    C.  $I = 4x^6 + 2x^2 + C$ .    D.  $I = 12x^2 + 2$ .

**Câu 112.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f'(x).f(x) = x^4 + x^2$ . Biết  $f(0) = 2$ . Tính  $f^2(2)$ .

- A.  $f^2(2) = \frac{313}{15}$ .    B.  $f^2(2) = \frac{332}{15}$ .    C.  $f^2(2) = \frac{324}{15}$ .    D.  $f^2(2) = \frac{323}{15}$ .

**Câu 113.** Cho hai hàm số  $F(x), G(x)$  xác định và có đạo hàm lần lượt là  $f(x), g(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Biết rằng

$F(x).G(x) = x^2 \ln(x^2 + 1)$  và  $F(x).g(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ . Họ nguyên hàm của  $f(x).G(x)$  là

- A.  $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + 2x^2 + C$ .    B.  $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - 2x^2 + C$ .  
C.  $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C$ .    D.  $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + x^2 + C$ .

**Câu 114.** Cho hàm số  $f$  liên tục và có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) > -1 \forall x \in \mathbb{R}, f(0) = 0$  và thỏa mãn

$f'(x)\sqrt{x^2 + 1} = 2x\sqrt{f(x) + 1}$ . Tính  $f(\sqrt{3})$ .

- A. 9.    B. 7.    C. 3.    D. 0.

**Câu 115.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên đoạn  $[-1; 2]$  thỏa mãn  $f(0) = 1$  và  $f^2(x).f'(x) = 1 + 2x + 3x^2$ .

Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x)$  trên  $[-1; 2]$  là

- A.  $\min_{[-1;2]} f(x) = \sqrt[3]{2}; \max_{[-1;2]} f(x) = \sqrt[3]{43}$ .    B.  $\min_{[-1;2]} f(x) = \sqrt[3]{2}; \max_{[-1;2]} f(x) = \sqrt[3]{40}$   
C.  $\min_{[-1;2]} f(x) = \sqrt[3]{-2}; \max_{[-1;2]} f(x) = \sqrt[3]{43}$ .    D.  $\min_{[-1;2]} f(x) = \sqrt[3]{-2}; \max_{[-1;2]} f(x) = \sqrt[3]{40}$ .

**Câu 116.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn các điều kiện:  $f(0) = 2\sqrt{2}$ ,  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  và

$f(x).f'(x) = (2x + 1)\sqrt{1 + f^2(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó giá trị  $f(1)$  bằng

- A.  $\sqrt{26}$ .    B.  $\sqrt{24}$ .    C.  $\sqrt{15}$ .    D.  $\sqrt{23}$ .

**Câu 117.** Cho h/s  $y = f(x)$  liên tục trên  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}; f(1) = \frac{1}{2}$ . Tính

$f(4)$ ?

- A. 24.    B. 14.    C. 4.    D. 16.

**Câu 118.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = f'(0) = 1$ .

Tính giá trị của  $T = f^2(2)$ .

- A.  $\frac{43}{30}$ .    B.  $\frac{16}{15}$ .    C.  $\frac{43}{15}$ .    D.  $\frac{26}{15}$ .

### Vấn đề 9. Các bài toán nguyên hàm có điều kiện.

**Câu 119.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{2}{2x-1}, f(0) = 1, f(1) = 2$ . Giá trị

của biểu thức  $f(-1) + f(3)$  bằng

- A.  $2 + \ln 15$     B.  $3 + \ln 15$     C.  $\ln 15$     D.  $4 + \ln 15$

**Câu 120.**Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{2x}$  và  $F(0) = 0$ . Giá trị của  $F(\ln 3)$  bằng  
A. 2.                                      B. 6.                                      C. 8.                                      D. 4.

**Câu 121.**Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm  $f(x) = \cos 3x$  và  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$ . Tính  $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$ .

A.  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} + 2}{6}$       B.  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} - 2}{6}$       C.  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} + 6}{6}$       D.  $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} - 6}{6}$

**Câu 122.**Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $f(0) = 2017$ ,  $f(2) = 2018$ .  
Tính  $S = f(3) - f(-1)$ .

A.  $S = \ln 4035$ .                              B.  $S = 4$ .                                      C.  $S = \ln 2$ .                                      D.  $S = 1$ .

**Câu 123.**Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}$ ,  $f'(1) = 3$ ,  $f(1) = 2$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$ . Khi đó  $2a + b$  bằng

A.  $-\frac{3}{2}$ .                                      B. 0.                                      C. 5.                                      D.  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 124.**Gọi  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2^x$ , thỏa mãn  $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$ . Tính giá trị biểu thức  $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$ .

A.  $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} + 1}{\ln 2}$ .                                      B.  $T = 2^{2019 \cdot 2020}$ .  
C.  $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$ .                                      D.  $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$ .

**Câu 125.**Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ . Biết  $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$  với mọi  $k \in \mathbb{Z}$ .  
Tính  $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi)$ .

A. 55.                                      B. 44.                                      C. 45.                                      D. 0.

**Câu 126.**Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$  và  $F(0) = \pi$ . Tính  $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

A.  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$ .                              B.  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ .                              C.  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi$ .                              D.  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$ .

**Câu 127.**Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$  thỏa mãn  $F(1) = \frac{1}{2}$ . Giá trị của biểu thức  $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019)$  bằng

A.  $\frac{2019}{2020}$ .                                      B.  $\frac{2019 \cdot 2021}{2020}$ .                                      C.  $2018 \frac{1}{2020}$ .                                      D.  $-\frac{2019}{2020}$ .

**Câu 128.**Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$  sao cho  $F(-2) + F(1) = 0$ . Giá trị của  $F(-1) + F(2)$  bằng

A.  $\frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5$ .                              B. 0.                                      C.  $\frac{7}{3} \ln 2$ .                                      D.  $\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3}{6} \ln 5$ .



**Câu 129.** Gọi  $g(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \ln(x-1)$ . Cho biết  $g(2) = 1$  và  $g(3) = a \ln b$  trong đó  $a, b$  là các số nguyên dương phân biệt. Hãy tính giá trị của  $T = 3a^2 - b^2$

- A.  $T = 8$ .                      B.  $T = -17$ .                      C.  $T = 2$ .                      D.  $T = -13$ .

**Câu 130.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) \neq 0$  với mọi  $x$  và thỏa mãn  $f(1) = -\frac{1}{2}$ ,

$f'(x) = (2x+1)f^2(x)$ . Biết  $f(1) + f(2) + \dots + f(2019) = \frac{a}{b} - 1$  với  $a, b \in \mathbb{N}, (a, b) = 1$ . Khẳng định

nào sau đây sai?

- A.  $a - b = -2019$ .                      B.  $ab > 2019$ .                      C.  $2a + b = 2022$ .                      D.  $b \leq 2020$ .

**Vấn đề 10. Một số bài toán ứng dụng của nguyên hàm.**

**Câu 131.** Một chất điểm chuyển động với phương trình  $S = \frac{1}{2}t^2$ , trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây

( $s$ ) và  $S$  là quãng đường tính bằng mét ( $m$ ). Vận tốc của chất điểm tại thời điểm  $t_0 = 5(s)$  là:

- A.  $5(m/s)$                       B.  $25(m/s)$                       C.  $2,5(m/s)$ .                      D.  $10(m/s)$ .

**Câu 132.** Một ô tô đang chạy với vận tốc  $10(m/s)$  thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = 10 - 2t(m/s)$ , trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

- A.  $50m$ .                      B.  $25m$ .                      C.  $55m$ .                      D.  $10m$ .

**Câu 133.** Một vận động viên điền kinh chạy với gia tốc  $a(t) = -\frac{1}{24}t^3 + \frac{5}{16}t^2(m/s^2)$ , trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính từ lúc xuất phát. Hỏi vào thời điểm  $5(m/s)$  sau khi xuất phát thì vận tốc của vận động viên là bao nhiêu?

- A.  $5,6m/s$                       B.  $6,51(m/s)$ .                      C.  $7,72(m/s)$                       D.  $6,8(m/s)$

**Câu 134.** Số lượng của một loại vi khuẩn được tính theo công thức  $N(x)$ , trong đó  $x$  là số ngày kể từ thời điểm ban đầu. Biết rằng  $N'(x) = \frac{2000}{1+x}$  và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con. Hỏi ngày thứ 12 số lượng vi khuẩn gần nhất với kết quả nào sau đây?

- A. 10130.                      B. 10120.                      C. 5154.                      D. 10132.

**Câu 135.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$  thỏa mãn  $F(0) = -\ln 2$ . Tập nghiệm

$S$  của phương trình  $F(x) + \ln(e^x + 1) = 3$  là:

- A.  $S = \{\pm 3\}$                       B.  $S = \{3\}$                       C.  $S = \emptyset$                       D.  $S = \{-3\}$

**Câu 136.** Biết rằng  $F(x)$  là một nguyên hàm trên  $\mathbb{R}$  của hàm số  $f(x) = \frac{2017x}{(x^2 + 1)^{2018}}$  thỏa mãn  $F(1) = 0$

. Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của  $F(x)$ .

- A.  $m = -\frac{1}{2}$ .                      B.  $m = \frac{1 - 2^{2017}}{2^{2018}}$ .                      C.  $m = \frac{1 + 2^{2017}}{2^{2018}}$ .                      D.  $m = \frac{1}{2}$ .

**Câu 137.** Giả sử  $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)} + C$  ( $C$  là hằng số).

Tính tổng các nghiệm của phương trình  $g(x) = 0$ .

A.  $-1$ .

B.  $1$ .

C.  $3$ .

D.  $-3$ .

**Câu 138.** Cho hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$  trên khoảng  $(0; \pi)$ . Biết

rằng giá trị lớn nhất của  $F(x)$  trên khoảng  $(0; \pi)$  là  $\sqrt{3}$ . Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A.  $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$

B.  $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C.  $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

D.  $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3 - \sqrt{3}$

Tuyensinh247.com

**B. TÍCH PHÂN.****Vấn đề 1. Tích phân hàm đa thức**

**Câu 1.** Tính tích phân  $I = \int_{-1}^0 (2x + 1) dx$ .

- A.  $I = 0$ .                      B.  $I = 1$ .                      C.  $I = 2$ .                      D.  $I = -\frac{1}{2}$ .

**Câu 2.** Tích phân  $\int_0^1 (3x + 1)(x + 3) dx$  bằng

- A. 12.                              B. 9.                              C. 5.                              D. 6.

**Câu 3.** Tính tích phân  $I = \int_0^2 (2x + 1) dx$

- A.  $I = 5$ .                      B.  $I = 6$ .                      C.  $I = 2$ .                      D.  $I = 4$ .

**Câu 4.** Với  $a, b$  là các tham số thực. Giá trị tích phân  $\int_0^b (3x^2 - 2ax - 1) dx$  bằng

- A.  $b^3 - b^2a - b$ .              B.  $b^3 + b^2a + b$ .              C.  $b^3 - ba^2 - b$ .              D.  $3b^2 - 2ab - 1$ .

**Câu 5.** Biết rằng hàm số  $f(x) = mx + n$  thỏa mãn  $\int_0^1 f(x) dx = 3$ ,  $\int_0^2 f(x) dx = 8$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A.  $m + n = 4$ .                      B.  $m + n = -4$ .                      C.  $m + n = 2$ .                      D.  $m + n = -2$ .

**Câu 6.** Cho  $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$ . Giá trị của tham số  $m$  thuộc khoảng nào sau đây?

- A.  $(-1; 2)$ .                      B.  $(-\infty; 0)$ .                      C.  $(0; 4)$ .                      D.  $(-3; 1)$ .

**Câu 7.** Cho  $n$  là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân  $I = \int_0^1 (1 - x^2)^n x dx$  theo  $n$ .

- A.  $I = \frac{1}{2n + 2}$ .                      B.  $I = \frac{1}{2n}$ .                      C.  $I = \frac{1}{2n - 1}$ .                      D.  $I = \frac{1}{2n + 1}$ .

**Vấn đề 2. Tích phân hàm số hữu tỉ.**

**Câu 8.**  $\int_1^2 \frac{dx}{2x + 3}$  bằng

- A.  $\frac{1}{2} \ln 35$                       B.  $\ln \frac{7}{5}$                       C.  $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$                       D.  $2 \ln \frac{7}{5}$

**Câu 9.** Cho  $\int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$  với  $a, b$  là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $a + 2b = 0$                       B.  $a + b = 2$                       C.  $a - 2b = 0$                       D.  $a + b = -2$

**Câu 10.** Tính tích phân  $I = \int_1^e \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

- A.  $I = \frac{1}{e}$                                   B.  $I = \frac{1}{e} + 1$                           C.  $I = 1$                                   D.  $I = e$

**Câu 11.** Tính tích phân  $I = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx$ .

- A.  $I = 1 - \ln 2$ .                      B.  $I = \frac{7}{4}$ .                                  C.  $I = 1 + \ln 2$ .                      D.  $I = 2 \ln 2$ .

**Câu 12.** Biết  $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ . Khi đó giá trị  $a + b + c$  bằng

- A.  $-3$ .                                      B.  $2$ .                                      C.  $1$ .                                      D.  $0$ .

**Câu 13.** Biết  $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$ , với  $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$ . Tính tổng  $S = a + b + c$ .

- A.  $S = 7$ .                                  B.  $S = 5$ .                                  C.  $S = 8$ .                                  D.  $S = 6$ .

**Câu 14.** Biết  $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Khi đó giá trị của  $a + 4b$  bằng

- A. 50                                      B. 60                                      C. 59                                      D. 40

**Câu 15.** Biết  $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$  với  $a, b$  là các số nguyên. Tính  $S = a - 2b$ .

- A.  $S = 2$ .                                  B.  $S = -2$ .                                  C.  $S = 5$ .                                  D.  $S = 10$ .

**Câu 16.** Biết  $\int_0^2 \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x + 3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$ , ( $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ). Giá trị của  $abc$  bằng

- A.  $-8$ .                                      B.  $-10$ .                                      C.  $-12$ .                                      D.  $16$ .

**Câu 17.** Tích phân  $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$  có giá trị bằng

- A.  $\ln 2 - 1$ .                              B.  $-\ln 2$ .                              C.  $\ln 2$ .                              D.  $1 - \ln 2$ .

**Câu 18.** Tính  $K = \int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1} dx$ .

- A.  $K = \ln 2$ .      B.  $K = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$ .      C.  $K = 2 \ln 2$ .      D.  $K = \ln \frac{8}{3}$ .

**Câu 19.** Cho tích phân  $I = \int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5} dx$ , giả sử đặt  $t = 1 + x^2$ . Tìm mệnh đề đúng.

- A.  $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt$ .      B.  $I = \int_1^3 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt$ .  
 C.  $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt$ .      D.  $I = \frac{3}{2} \int_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt$ .

**Câu 20.** Có bao nhiêu số thực  $a$  để  $\int_0^1 \frac{x}{a+x^2} dx = 1$ .

- A. 2      B. 1      C. 0      D. 3

**Câu 21.** Biết  $\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx = a - \ln b$  với  $a, b$  là các số nguyên dương. Tính  $P = a^2 + b^2$ .

- A. 13.      B. 5.      C. 4.      D. 10.

### Vấn đề 3. Tích phân hàm vô tỉ.

**Câu 22.** Cho  $\int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = a \ln 3 + b \ln 5 + c \ln 7$ , với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $a - b = -2c$       B.  $a + b = -2c$       C.  $a + b = c$       D.  $a - b = -c$

**Câu 23.** Tính tích phân  $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$  bằng cách đặt  $u = x^2 - 1$ , mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$       B.  $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du$       C.  $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du$       D.  $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$

**Câu 24.** Tích phân  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$  bằng

- A.  $\frac{4}{3}$ .      B.  $\frac{3}{2}$ .      C.  $\frac{1}{3}$ .      D.  $\frac{2}{3}$ .

**Câu 25.** Biết  $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương. Tính

$$P = a + b + c$$

- A.  $P = 18$       B.  $P = 46$       C.  $P = 24$       D.  $P = 12$

**Câu 26.** Cho tích phân  $I = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16-x^2} dx$  và  $x = 4 \sin t$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt.$

B.  $I = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt.$

C.  $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt.$

D.  $I = -16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt.$

**Câu 27.** Biết  $\int_1^5 \frac{1}{1 + \sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$  ( $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ). Giá trị của  $a + b + c$  bằng

A.  $\frac{7}{3}.$

B.  $\frac{5}{3}.$

C.  $\frac{8}{3}.$

D.  $\frac{4}{3}.$

**Câu 28.** Cho biết  $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx = \frac{m}{n}$  với  $\frac{m}{n}$  là một phân số tối giản. Tính  $m - 7n$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 91.

**Câu 29.** Cho  $\int_0^3 \frac{x}{4 + 2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{3} + b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số nguyên. Giá trị  $a + b + c$  bằng:

A. 9

B. 2

C. 1

D. 7

**Câu 30.** Tính  $I = \int_0^a \frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$

A.  $I = (a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} - 1.$

B.  $I = \frac{1}{3}[(a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} - 1].$

C.  $I = \frac{1}{3}[(a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} + 1].$

D.  $I = (a^2 + 1)\sqrt{a^2 + 1} + 1.$

**Câu 31.** Giá trị của tích phân  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$  bằng tích phân nào dưới đây?

A.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 y dy.$

B.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx.$

C.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 y}{\cos y} dy.$

D.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 y dy.$

**Câu 32.** Cho tích phân  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$  nếu đổi biến số  $x = 2 \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  thì ta được.

A.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt.$

B.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt.$

C.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t dt.$

D.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t}.$

**Câu 33.** Biết  $\int_0^1 \frac{x^3}{x + \sqrt{1+x^2}} dx = \frac{a\sqrt{b} + c}{15}$  với  $a, b, c$  là các số nguyên và  $b \geq 0$ . Tính

$$P = a + b^2 - c.$$

- A.  $P = 3$ .                      B.  $P = 7$ .                      C.  $P = -7$ .                      D.  $P = 5$ .

**Câu 34.** Giả sử  $I = \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = a \ln \frac{2}{3} + b$  với  $a, b$  là số nguyên. Khi đó giá trị  $a - b$  là

- A.  $-17$ .                      B.  $5$ .                      C.  $-5$ .                      D.  $17$ .

**Câu 35.** Biết  $\int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{35}$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ, tính

$$P = a + 2b + c - 7.$$

- A.  $-\frac{1}{9}$ .                      B.  $\frac{86}{27}$ .                      C.  $-2$ .                      D.  $\frac{67}{27}$ .

**Câu 36.** Biết  $\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1} dx}{2x + 3\sqrt{2x+1} + 3} = a + b \ln 2 + c \ln \frac{5}{3}$  ( $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ). Tính  $T = 2a + b + c$ .

- A.  $T = 4$ .                      B.  $T = 2$ .                      C.  $T = 1$ .                      D.  $T = 3$ .

#### Vấn đề 4. Tích phân hàm lượng giác.

**Câu 37.** Cho hàm số  $f(x)$ . Biết  $f(0) = 4$  và  $f'(x) = 2 \sin^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , khi đó  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$  bằng

- A.  $\frac{\pi^2 + 16\pi - 4}{16}$ .                      B.  $\frac{\pi^2 - 4}{16}$ .                      C.  $\frac{\pi^2 + 15\pi}{16}$ .                      D.  $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$ .

**Câu 38.** Cho hàm số  $f(x)$ . Biết  $f(0) = 4$  và  $f'(x) = 2 \cos^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$ , khi đó  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$  bằng?

- A.  $\frac{\pi^2 + 8\pi + 8}{8}$ .                      B.  $\frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}$ .                      C.  $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}$ .                      D.  $\frac{\pi^2 + 2}{8}$ .

**Câu 39.** Giá trị của  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$  bằng

- A.  $0$ .                      B.  $1$ .                      C.  $-1$ .                      D.  $\frac{\pi}{2}$ .

**Câu 40.** Giả sử  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx = a + b \frac{\sqrt{2}}{2}$  ( $a, b \in \mathbb{Q}$ ). Khi đó giá trị của  $a - b$  là

- A.  $-\frac{1}{6}$ .                      B.  $-\frac{1}{6}$ .                      C.  $-\frac{3}{10}$ .                      D.  $\frac{1}{5}$ .

**Câu 41.** Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin x - \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx = \frac{-11}{3} \ln 2 + b \ln 3 + c$  ( $b, c \in \mathbb{Q}$ ). Tính  $\frac{b}{c}$ ?

A.  $\frac{22}{3}$ .

B.  $\frac{22\pi}{3}$ .

C.  $\frac{22}{3\pi}$ .

D.  $\frac{22\pi}{13}$ .

**Câu 42.** Tính tích phân  $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx$ .

A.  $I = -\frac{1}{4}$

B.  $I = -\frac{1}{4} \pi^4$

C.  $I = -\pi^4$

D.  $I = 0$

**Câu 43.** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + \cos x} \cdot \sin x dx$ . Nếu đặt  $t = 2 + \cos x$  thì kết quả nào sau đây đúng?

A.  $I = \int_3^2 \sqrt{t} dt$ .

B.  $I = \int_2^3 \sqrt{t} dt$ .

C.  $I = 2 \int_3^2 \sqrt{t} dt$ .

D.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t} dt$ .

**Câu 44.** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$  bằng cách đặt  $u = \tan x$ , mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u^2 du$ .

B.  $I = \int_0^2 \frac{1}{u^2} du$ .

C.  $I = -\int_0^1 u^2 du$ .

D.  $I = \int_0^1 u^2 du$ .

**Câu 45.** Cho tích phân  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A.  $2a + b = 0$ .

B.  $a - 2b = 0$ .

C.  $2a - b = 0$ .

D.  $a + 2b = 0$ .

**Câu 46.** Có bao nhiêu số  $a \in (0; 20\pi)$  sao cho  $\int_0^a \sin^5 x \sin 2x dx = \frac{2}{7}$ .

A. 10.

B. 9.

C. 20.

D. 19.

**Câu 47.** Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1 + \sin x} = \frac{a\sqrt{3} + b}{c}$ , với  $a, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}^+$  và  $a, b, c$  là các số nguyên tố cùng nhau. Giá trị của tổng  $a + b + c$  bằng

A. 5.

B. 12.

C. 7.

D. -1.

**Câu 48.** Cho tích phân số  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A.  $2a + b = 0$ .      B.  $a - 2b = 0$ .      C.  $2a - b = 0$ .      D.  $a + 2b = 0$ .

**Câu 49.** Cho  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2 - 5 \cos x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$ , với  $a, b$  là các số hữu tỉ,  $c > 0$ . Tính tổng  $m$ .

- A.  $S = 3$ .      B.  $S = 0$ .      C.  $S = 1$ .      D.  $S = 4$ .

### Vấn đề 5. Tích phân hàm mũ và logarit.

**Câu 50.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . Tính:  $I = F(e) - F(1)$ ?

- A.  $I = \frac{1}{2}$       B.  $I = \frac{1}{e}$       C.  $I = 1$       D.  $I = e$

**Câu 51.**  $\int_0^1 e^{3x+1} dx$  bằng

- A.  $\frac{1}{3}(e^4 + e)$       B.  $e^3 - e$       C.  $\frac{1}{3}(e^4 - e)$       D.  $e^4 - e$

**Câu 52.** Cho  $\int_1^2 e^{3x-1} dx = m(e^p - e^q)$  với  $m, p, q \in \mathbb{Q}$  và là các phân số tối giản. Giá trị  $m + p + q$  bằng

- A. 10.      B. 6.      C.  $\frac{22}{3}$ .      D. 8.

**Câu 53.** Biết tích phân  $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x + 3}} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính

$$T = a + b + c.$$

- A.  $T = -1$ .      B.  $T = 0$ .      C.  $T = 2$ .      D.  $T = 1$ .

**Câu 54.** Biết  $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}} dx = a + b\sqrt{2}$  với  $a, b$  là các số hữu tỷ. Tính  $S = a + b$ .

- A.  $S = 1$ .      B.  $S = \frac{1}{2}$ .      C.  $S = \frac{3}{4}$ .      D.  $S = \frac{2}{3}$ .

**Câu 55.** Cho  $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = a + b \ln \frac{1+e}{2}$ , với  $a, b$  là các số hữu tỉ. Tính  $S = a^3 + b^3$ .

- A.  $S = -2$ .      B.  $S = 0$ .      C.  $S = 1$ .      D.  $S = 2$ .

**Câu 56.** Cho tích phân  $I = \int_1^e \frac{3 \ln x + 1}{x} dx$ . Nếu đặt  $t = \ln x$  thì

- A.  $I = \int_0^1 \frac{3t+1}{e^t} dt$ .      B.  $I = \int_1^e \frac{3t+1}{t} dt$ .      C.  $I = \int_1^e (3t+1) dt$ .      D.  $I = \int_0^1 (3t+1) dt$ .

**Câu 57.** Cho  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + \frac{c}{3}$ , với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Khẳng định nào sau đây đúng.

- A.  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .      B.  $a^2 + b^2 + c^2 = 11$ .      C.  $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ .      D.  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ .

**Câu 58.** Biết  $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 3e^{-x} + 4} = \frac{1}{c} (\ln a - \ln b + \ln c)$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương.

Tính  $P = 2a - b + c$ .

- A.  $P = -3$ .      B.  $P = -1$ .      C.  $P = 4$ .      D.  $P = 3$

### Vấn đề 6. Tích phân tổng hợp.

**Câu 59.** Biết rằng  $\int_0^1 xe^{x^2+2} dx = \frac{a}{2}(e^b - e^c)$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Giá trị của  $a + b + c$  bằng

- A. 4.      B. 7.      C. 5.      D. 6.

**Câu 60.** Biết  $\int_1^e \frac{x+1}{x^2+x \ln x} dx = \ln(ae+b)$  với  $a, b$  là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức

$$T = a^2 - ab + b^2.$$

- A. 3.      B. 1.      C. 0.      D. 8.

**Câu 61.** Biết  $\int_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}} dx = me^{\frac{p}{q}} - n$ , trong đó  $m, n, p, q$  là các số nguyên dương và  $\frac{p}{q}$  là phân số tối giản. Tính  $T = m + n + p + q$ .

- A.  $T = 11$ .      B.  $T = 10$ .      C.  $T = 7$ .      D.  $T = 8$ .

**Câu 62.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  đồng thời thỏa mãn  $f(0) = f(1) = 5$ . Tính tích phân

$$I = \int_0^1 f'(x) e^{f(x)} dx.$$

- A.  $I = 10$       B.  $I = -5$       C.  $I = 0$       D.  $I = 5$

**Câu 63.** Biết  $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$  trong đó  $a, b, c$  là các số thực. Giá trị của biểu thức  $T = a + b + c$  là:

- A.  $T = 11$ .      B.  $T = 9$ .      C.  $T = 10$ .      D.  $T = 8$ .

**Câu 64.** Cho  $\int_1^e \frac{(3x^3 - 1) \ln x + 3x^2 - 1}{1 + x \ln x} dx = ae^3 + b + c \cdot \ln(e + 1)$  với  $a, b, c$  là các số nguyên và

$$\ln e = 1. \text{ Tính } P = a^2 + b^2 + c^2.$$

- A.  $P = 9$ .      B.  $P = 14$ .      C.  $P = 10$ .      D.  $P = 3$ .

**Câu 65.** Biết  $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+x \ln x} dx = \ln(\ln a + b)$  với  $a, b$  là các số nguyên dương. Tính

$$P = a^2 + b^2 + ab.$$

- A. 10.                                      B. 8.                                      C. 12.                                      D. 6.

**Câu 66.** Cho  $\int_0^1 \frac{(x^2+x)e^x}{x+e^{-x}} dx = a.e + b \ln(e+c)$  với  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Tính  $P = a + 2b - c$ .

- A.  $P = 1$ .                                      B.  $P = -1$ .                                      C.  $P = 0$ .                                      D.  $P = -2$ .

**Vấn đề 7. Tích phân dùng tính chất.**

**Câu 67.** Biết  $\int_1^2 f(x) dx = 2$  và  $\int_1^2 g(x) dx = 6$ , khi đó  $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx$  bằng

- A. 8.                                      B. -4.                                      C. 4.                                      D. -8.

**Câu 68.** Biết tích phân  $\int_0^1 f(x) dx = 3$  và  $\int_0^1 g(x) dx = -4$ . Khi đó  $\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$  bằng

- A. -7.                                      B. 7.                                      C. -1.                                      D. 1.

**Câu 69.** Biết  $\int_0^1 f(x) dx = 2$  và  $\int_0^1 g(x) dx = -4$ , khi đó  $\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$  bằng

- A. 6.                                      B. -6.                                      C. -2.                                      D. 2.

**Câu 70.** Cho  $\int_0^1 f(x) dx = 2$  và  $\int_0^1 g(x) dx = 5$ , khi S bằng

- A. -8                                      B. 1                                      C. -3                                      D. 12

**Câu 71.** Khẳng định nào trong các khẳng định sau đúng với mọi hàm  $f, g$  liên tục trên  $K$  và  $a, b$  là các số bất kỳ thuộc  $K$ ?

A.  $\int_a^b [f(x) + 2g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + 2 \int_a^b g(x) dx.$       B.  $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}.$

C.  $\int_a^b [f(x).g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx.$       D.  $\int_a^b f^2(x) dx = \left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2.$

**Câu 72.** Cho.  $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1.$ ,  $\int_{-2}^4 f(t) dt = -4$ . Tính  $\int_2^4 f(y) dy$ .

- A.  $I = 5$ .                                      B.  $I = -3$ .                                      C.  $I = 3$ .                                      D.  $I = -5$ .

**Câu 73.** Cho  $\int_0^2 f(x) dx = 3$  và  $\int_0^2 g(x) dx = 7$ , khi đó  $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)] dx$  bằng







**Câu 99.** Cho  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) = f(10 - x)$  và  $\int_3^7 f(x) dx = 4$ . Tính

$$I = \int_3^7 xf(x) dx.$$

- A. 80.                      B. 60.                      C. 40.                      D. 20.

**Câu 100.** Cho  $\int_0^1 f(x) dx = 9$ . Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x) \cos 3x dx$ .

- A.  $I = 5$ .                      B.  $I = 9$ .                      C.  $I = 3$ .                      D.  $I = 2$ .

**Câu 101.** Cho hàm  $f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^{2017} f(x) dx = 1$ . Tính tích phân  $I = \int_0^1 f(2017x) dx$ .

- A.  $I = \frac{1}{2017}$ .                      B.  $I = 0$ .                      C.  $I = 2017$ .                      D.  $I = 1$ .

**Câu 102.** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x^2; & x \geq 1 \\ 5 - x; & x < 1 \end{cases}$ . Tính

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + 3 \int_0^1 f(3 - 2x) dx.$$

- A.  $I = \frac{71}{6}$ .                      B.  $I = 31$ .                      C.  $I = 32$ .                      D.  $I = \frac{32}{3}$ .

**Câu 103.** Cho  $I = \int_1^2 f(x) dx = 2$ . Giá trị của  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin xf(\sqrt{3 \cos x + 1})}{\sqrt{3 \cos x + 1}} dx$  bằng

- A. 2.                      B.  $-\frac{4}{3}$ .                      C.  $\frac{4}{3}$ .                      D. -2.

**Câu 104.** Biết  $\int_1^4 f(x) dx = 5$  và  $\int_4^5 f(x) dx = 20$ . Tính  $\int_1^2 f(4x - 3) dx - \int_0^{\ln 2} f(e^{2x}) e^{2x} dx$ .

- A.  $I = \frac{15}{4}$ .                      B.  $I = 15$ .                      C.  $I = \frac{5}{2}$ .                      D.  $I = 25$ .

**Câu 105.** Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x) + f(2 - x) = xe^{x^2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Tính tích

phân  $I = \int_0^2 f(x) dx$ .

- A.  $I = \frac{e^4 - 1}{4}$ .                      B.  $I = \frac{2e - 1}{2}$ .                      C.  $I = e^4 - 2$ .                      D.  $I = e^4 - 1$ .

**Câu 106.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(2x) = 3f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ . Biết rằng

$$\int_0^1 f(x) dx = 1. \text{ Tính tích phân } I = \int_1^2 f(x) dx.$$

- A.  $I = 5$                       B.  $I = 6$                       C.  $I = 3$                       D.  $I = 2$

**Câu 107.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa  $\int_0^{2018} f(x) dx = 2$ . Khi đó tích phân

$$\int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f(\ln(x^2+1)) dx \text{ bằng}$$

- A. 4.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

**Câu 108.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 3$  và  $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = 1$ . Tính

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

- A.  $I = 2$ .                      B.  $I = 6$ .                      C.  $I = 3$ .                      D.  $I = 4$ .

**Câu 109.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x f(\sin^2 x) dx = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1$ .

Tính tích phân  $\int_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx$ .

- A.  $I = 3$ .                      B.  $I = \frac{3}{2}$ .                      C.  $I = 2$ .                      D.  $I = \frac{5}{2}$ .

**Câu 110.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[1; 4]$  và thỏa mãn  $f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$ . Tính tích

phân  $I = \int_3^4 f(x) dx$ .

- A.  $I = 3 + 2 \ln^2 2$ .                      B.  $I = 2 \ln^2 2$ .                      C.  $I = \ln^2 2$ .                      D.  $I = 2 \ln 2$ .

**Câu 111.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn:  $7f(x) + 4f(4-x) = 2018x\sqrt{x^2+9}, \forall x \in \mathbb{R}$

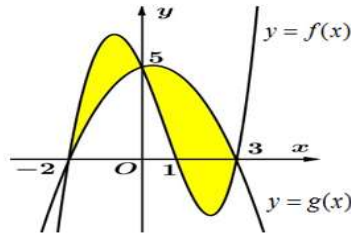
. Tính  $I = \int_0^4 f(x) dx$ .

- A.  $\frac{2018}{11}$ .                      B.  $\frac{7063}{3}$ .                      C.  $\frac{98}{3}$ .                      D.  $\frac{197764}{33}$ .



### C. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN.

**Câu 1.** Diện tích phần hình phẳng tô đen trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào dưới đây?



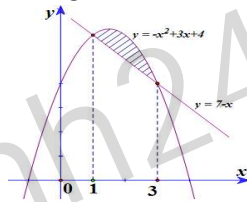
**A.**  $\int_{-2}^3 (f(x) - g(x)) dx$ .

**B.**  $\int_{-2}^3 (g(x) - f(x)) dx$ .

**C.**  $\int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx$ .

**D.**  $\int_{-2}^0 (g(x) - f(x)) dx + \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx$ .

**Câu 2.** Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào dưới đây?



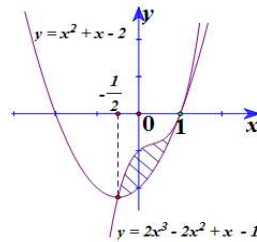
**A.**  $\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$ .

**B.**  $\int_1^3 (-x^2 + 2x + 11) dx$ .

**C.**  $\int_1^3 (x^2 - 2x - 11) dx$ .

**D.**  $\int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx$ .

**Câu 3.** Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào dưới đây?



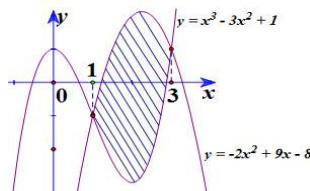
**A.**  $\int_{\frac{1}{2}}^1 (-2x^3 + 3x^2 - 1) dx$ .

**B.**  $\int_{\frac{1}{2}}^1 (2x^3 - x^2 + 2x - 3) dx$ .

**C.**  $\int_{\frac{1}{2}}^1 (2x^3 - 3x^2 + 1) dx$ .

**D.**  $\int_{\frac{1}{2}}^1 (-2x^3 + x^2 - 2x + 3) dx$ .

**Câu 4.** Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào dưới đây?



**A.**  $\int_1^3 (x^3 - 5x^2 + 9x - 7) dx$ .

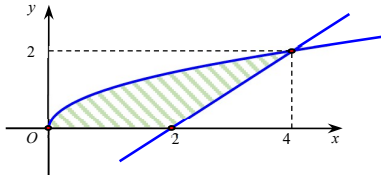
**B.**  $\int_1^3 (-x^3 + 5x^2 - 9x + 7) dx$ .

**C.**  $\int_1^3 (-x^3 + x^2 + 9x - 9) dx$ .

**D.**  $\int_1^3 (x^3 - x^2 - 9x + 9) dx$ .

**Câu 5.** Tính diện tích  $S$  của hình phẳng (phần gạch sọc) giới hạn bởi hai đồ thị hàm số

$f(x) = \sqrt{x}$ ;  $g(x) = x - 2$  và trục hoành là:



- A.  $S = \frac{7}{3}$ .                      B.  $S = \frac{10}{3}$ .                      C.  $S = \frac{11}{3}$ .                      D.  $S = \frac{13}{3}$ .

**Câu 6.** Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = e^{2x}$ , trục  $Ox, Oy$  và đường thẳng  $x = 2$ . Tính  $S$  hình phẳng trên.

- A.  $e^4 - 1$ .                      B.  $\frac{1}{2}(e^4 - 1)$ .                      C.  $\frac{1}{2}e^4$ .                      D.  $\frac{1}{2}(e^4 + 1)$ .

**Câu 7.** Gọi  $S$  là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = \frac{\ln x}{x^2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = e$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $S = \pi \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ .                      B.  $S = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ .                      C.  $S = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^2 dx$ .                      D.  $S = \pi \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^2 dx$ .

**Câu 8.** Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường  $y = \sin 2x$ ;  $y = \cos x$  và  $x = 0$ ;  $x = \frac{\pi}{2}$  là

- A.  $\frac{1}{4}$ .                      B.  $\frac{1}{6}$ .                      C.  $\frac{3}{2}$ .                      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 9.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = 2x - 1$ ;  $y = \frac{6}{x}$ ;  $x = 3$  là:

- A.  $4 - 6 \ln 6$ .                      B.  $4 + 6 \ln \frac{2}{3}$ .                      C.  $\frac{443}{24}$ .                      D.  $\frac{25}{6}$ .

**Câu 10.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = e^x$ ;  $y = 1$  và  $x = 1$  là:

- A.  $e - 2$ .                      B.  $e$ .                      C.  $e + 1$ .                      D.  $1 - e$ .

**Câu 11.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = 4x - x^2$  và trục  $Ox$

- A. 11.                      B.  $\frac{34}{3}$ .                      C.  $\frac{31}{3}$ .                      D.  $\frac{32}{3}$ .

**Câu 12.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường  $y = x^3 + 11x - 6$  và  $y = 6x^2$  là

- A. 52.                      B. 14.                      C.  $\frac{1}{4}$ .                      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 13.** Gọi  $S$  là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số (H):  $y = \frac{x-1}{x+1}$  và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của  $S$  bằng

- A.  $S = 2 \ln 2 - 1$ .                      B.  $S = \ln 2 + 1$ .                      C.  $S = \ln 2 - 1$ .                      D.  $S = 2 \ln 2 + 1$ .

**Câu 14.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị (P):  $y = -\frac{1}{3}(x^2 - 8x + 7)$ , (H):  $y = \frac{x-7}{3-x}$ .

- A. 3,455.                      B.  $9 - 8 \ln 2$ .                      C.  $3 - \ln 4$ .                      D.  $\frac{161}{9} + 4 \ln 3 + 8 \ln 2$ .

**Câu 15.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị  $y = |x^2 - 4x + 3|$  và  $y = x + 3$  là:

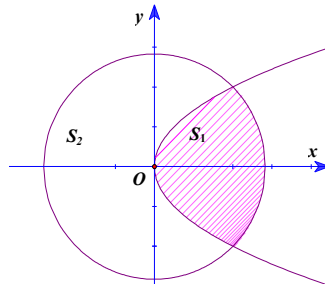
A.  $\frac{55}{6}$ .

B.  $\frac{205}{6}$ .

C.  $\frac{109}{6}$ .

D.  $\frac{126}{5}$ .

**Câu 16.** Biết rằng parabol  $(P): y^2 = 2x$  chia đường tròn  $(C): x^2 + y^2 = 8$  thành hai phần lồi có diện tích là  $S_1, S_2$  (như hình vẽ). Khi đó  $S_2 - S_1 = a\pi - \frac{b}{c}$  với  $a, b, c$  nguyên dương và  $\frac{b}{c}$  là phân số tối giản. Tính  $S = a + b + c$ .



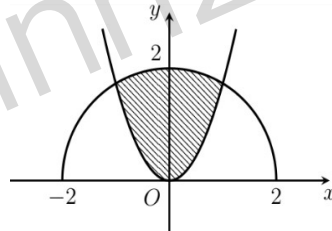
A.  $S = 13$ .

B.  $S = 16$ .

C.  $S = 15$ .

D.  $S = 14$ .

**Câu 17.** Cho  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi parabol  $y = \sqrt{3}x^2$  và nửa đường tròn tâm  $(H)$  bán kính bằng 2 nằm phía trên trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ bên). Diện tích của  $(H)$  được tính theo công thức nào dưới đây?



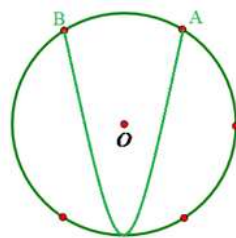
A.  $S = \int_0^1 [\sqrt{2-x^2} - \sqrt{3}x^2] dx$ .

B.  $S = 2 \cdot \int_0^1 [\sqrt{4-x^2} - \sqrt{3}x^2] dx$ .

C.  $S = \int_0^1 [\sqrt{3}x^2 - \sqrt{4-x^2}] dx$ .

D.  $S = \int_0^1 [\sqrt{4-x^2} - \sqrt{3}x^2] dx$ .

**Câu 18.** Bạn An xây một bể cá hình tròn tâm  $O$  bán kính 10m và chia nó thành 2 phần như hình vẽ sau. Bạn An sẽ thả cá cảnh với mật độ 4 con cá cảnh trên  $1m^2$  ở phần bể giới hạn bởi đường tròn tâm  $O$  và Parabol có trục đối xứng đi qua  $O$  và chứa  $O$ . Gọi  $S$  là phần nguyên của diện tích phần thả cá. Hỏi bạn An thả được bao nhiêu con cá cảnh trên phần bể có diện tích  $S$ , biết  $A, B \in (O)$  và  $AB = 12m$ ?



A. 560.

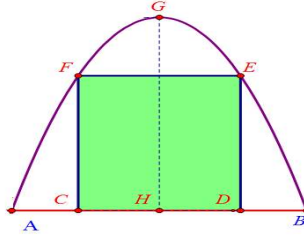
B. 650.

C. 460.

D. 640.

**Câu 19.** Lương giáo viên thấp nên thầy Nam chăn nuôi thêm 2 con bò. Do diện tích đất của nhà thầy hẹp nên thầy xây chuồng bò như hình vẽ bên dưới và chia thành 2 phần bằng nhau để nhốt 2 con bò. Biết  $ABCD$  là hình vuông cạnh 4m và  $I$  là đỉnh của một Parabol có trục đối xứng là trung trực của  $BC$  và parabol đi qua hai điểm  $A, D$ . Tiền xây chuồng bò hết 350000 đồng/ $1m^2$ . Biết  $I$  cách  $BC$  một khoảng 5m, hãy tính số tiền chi phí thầy Nam bỏ ra để xây dựng chuồng bò (Làm tròn đến hàng nghìn)?

**Câu 20.** Một cái cổng hình parabol như hình vẽ. Chiều cao  $GH = 4m$ , chiều rộng  $AB = 4m$ ,  $AC = BD = 0,9m$ . Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật CDEF tô đậm giá là  $1200000$  đồng/ $m^2$ , còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là  $900000$  đồng/ $m^2$ .



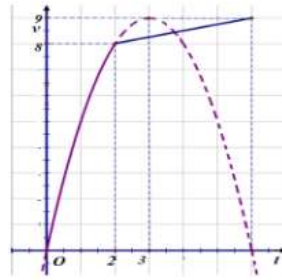
Hỏi tổng chi phí để là hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

- A. 11445000 (đồng).      B. 7368000 (đồng).      C. 4077000 (đồng).      D. 11370000 (đồng)

**Câu 21.** Một gia đình có khu vườn hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là 9 m và 4 m. Chủ nhà muốn đào một chiếc ao hình Elip, hỏi diện tích lớn nhất của mặt ao bằng

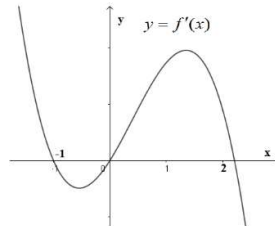
- A.  $9\pi$   $m^2$ .      B.  $10\pi$   $m^2$ .      C.  $\frac{81\pi}{4}$   $m^2$ ..      D.  $4\pi$   $m^2$ .

**Câu 22.** Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc  $v(km/h)$  phụ thuộc vào thời gian  $t(h)$  có đồ thị như hình dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh  $I(3;9)$  và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng  $\frac{1}{4}$ . Tính quãng đường  $s$  mà vật di chuyển được trong 6 giờ?



- A.  $\frac{130}{3}(km)$ .      B.  $9(km)$ .      C.  $40(km)$ .      D.  $\frac{134}{3}(km)$ .

**Câu 23.** Cho hàm số  $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?



- A.  $a+c > 0$ .      B.  $a+b+c+d < 0$ .      C.  $a+c < b+d$ .      D.  $b+d-c > 0$ .

**Câu 24.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = mx \cos x$ ;  $Ox$ ;  $x = 0$ ;  $x = \pi$  bằng  $3\pi$ . Khi đó  $m$  là:

- A.  $m = -3$ .      B.  $m = 3$ .      C.  $m = -4$ .      D.  $m = \pm 3$ .

**Câu 25.** Cho Parabol  $(P): y = x^2 + 1$  và đường thẳng  $d: y = mx + 2$  với  $m$  là tham số. Gọi  $m_0$  là giá trị của  $m$  để diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $(P)$  và  $d$  là nhỏ nhất. Hỏi  $m_0$  nằm trong khoảng nào?

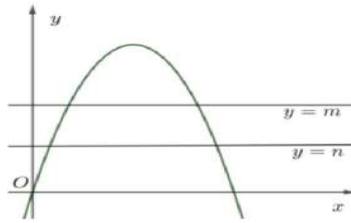
A.  $(-\sqrt{2}; -\frac{1}{2})$ .

B.  $(0; 1)$ .

C.  $(-1; \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

D.  $(\frac{1}{2}; 3)$ .

**Câu 26.** Gọi  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = -x^2 + 4x$  và trục hoành. Hai đường thẳng  $y = m$  và  $y = n$  chia  $(H)$  thành 3 phần có diện tích bằng nhau (tham khảo hình vẽ). Giá trị của biểu thức  $T = (4 - m)^3 + (4 - n)^3$  bằng



A.  $T = \frac{320}{9}$ .

B.  $T = \frac{512}{15}$ .

C.  $T = 405$ .

D.  $T = \frac{75}{2}$ .

**Câu 27.** Gọi  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi các đường:  $y = \sin x$ ;  $Ox$ ;  $x = 0$ ;  $x = \pi$ . Quay  $(H)$  xung quanh trục  $Ox$  ta được khối tròn xoay có thể tích là.

A.  $\frac{\pi^2}{2}$ .

B.  $\frac{\pi}{2}$ .

C.  $\pi$ .

D.  $\pi^2$ .

**Câu 28.** Gọi  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{x} \cdot \ln x$ , trục  $Ox$ ,  $x = 1$ ,  $x = e$ . Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng  $(H)$  quanh trục  $Ox$ .

A.  $\frac{\pi(e^2 + 1)}{4}$ .

B.  $\frac{\pi(e - 1)}{3}$ .

C.  $\frac{\pi(e + 1)}{3}$ .

D.  $\frac{\pi(e^2 - 1)}{4}$ .

**Câu 29.** Thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi  $y = \sqrt{x \cos x + \sin^2 x}$ ;  $y = 0$ ;  $x = 0$ ;  $x = \frac{\pi}{2}$ , là:

A.  $\frac{\pi(3\pi - 4)}{4}$

B.  $\frac{\pi(5\pi + 4)}{4}$

C.  $\frac{\pi(3\pi + 4)}{4}$

D.  $\frac{\pi(3\pi + 4)}{5}$

**Câu 30.** Tính thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi  $y = \sqrt{\ln x}$ , trục  $Ox$  và đường thẳng  $x = 2$  quay xung quanh trục  $Ox$ .

A.  $2 \ln 2 + 1$ .

B.  $2\pi \ln 2 + \pi$ .

C.  $2\pi \ln 2 - \pi$ .

D.  $2 \ln 2 - 1$ .

**Câu 31.** Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol  $(P)$ :  $y = x^2$  và đường thẳng  $d$ :  $y = 2x$  quay quanh trục  $Ox$  bằng

A.  $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$ .

B.  $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$ .

C.  $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$ .

D.  $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x) dx$ .

**Câu 32.** Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục  $Ox$  hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = e$  có giá trị bằng  $\frac{\pi}{a}(b \cdot e^3 - 2)$  trong đó  $a, b$  là hai số thực nào dưới đây?

A.  $a = 27, b = 5$ .

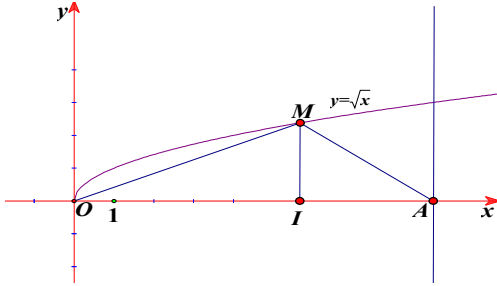
B.  $a = 24, b = 6$ .

C.  $a = 27, b = 6$ .

D.  $a = 24, b = 5$ .

**Câu 33.** Cho đồ thị  $(C)$ ;  $y = f(x) = \sqrt{x}$ . Gọi  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi  $(C)$ , đường thẳng  $x = 9$ , trục  $Ox$ . Cho  $M$  là điểm thuộc  $(C)$ ,  $A(9; 0)$ . Gọi  $V_1$  là thể tích khối tròn xoay khi cho  $(H)$  quay

quanh  $Ox$ ,  $V_2$  là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác  $AOM$  quay quanh  $Ox$ . Biết  $V_1 = \frac{9}{4}V_2$ . Tính diện tích  $S$  phần hình phẳng giới hạn bởi  $(C)$  và  $OM$ . (Hình vẽ không thể hiện chính xác điểm  $M$ ).



- A.  $S = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ .      B.  $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $S = \frac{27\sqrt{3}}{16}$ .      D.  $S = \sqrt{6}$ .

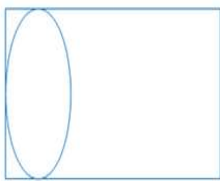
**Câu 34.** Thể tích khối tròn xoay khi cho Elip  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  quay quanh trục  $Ox$ :

- A.  $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ .      B.  $\frac{4}{3}\pi ab^2$ .      C.  $\frac{2}{3}\pi a^2 b$ .      D.  $-\frac{2}{3}\pi ab^2$ .

**Câu 35.** Thầy Nam dự định xây một bể bơi hình elip có độ dài trục lớn gấp hai lần trục bé và có diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng  $128\text{m}^2$ . Mỗi khối nước đổ vào bể có giá là  $8500$  đồng/ $\text{lm}^3$ . Biết bể bơi sâu  $2\text{m}$ . Hỏi thầy Nam cần bao nhiêu tiền để đổ nước vào  $80\%$  bể? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

- A.  $1\ 126\ 000$  đồng.      B.  $1\ 367\ 000$  đồng.      C.  $1\ 224\ 000$  đồng.      D.  $1\ 046\ 000$  đồng.

**Câu 36.** Thầy Nam mở trung tâm luyện thi Đại học và làm biển hiệu trung tâm hình chữ nhật có kích thước  $3\text{m} \times 2\text{m}$  như hình vẽ bên. Ở phần bên trái thầy đặt một hình elip tiếp xúc với 3 cạnh hình chữ nhật và khoảng cách từ tâm hình elip cách chiều rộng biển trung tâm  $0,5\text{m}$ . Kinh phí làm biển hiệu là  $900.000$  đồng. Biết tiền công trang trí phần bên trong hình elip là  $100.000$  đồng/ $\text{lm}^2$ . Hỏi phần còn lại làm bao nhiêu tiền trên  $1\text{m}^2$  (Làm tròn đến hàng nghìn)?



- A.  $260\ 000$  đồng.      B.  $186\ 000$  đồng.      C.  $168\ 000$  đồng.      D.  $206\ 000$  đồng.

**Câu 37.** Một tàu lửa đang chạy với vận tốc  $200\text{m/s}$  thì người lái tàu đạp phanh; từ thời điểm đó, tàu chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = 200 - 20t$  m/s. Trong đó  $t$  khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, tàu còn di chuyển được:

- A.  $1000\text{m}$ .      B.  $500\text{m}$ .      C.  $1500\text{m}$ .      D.  $2000\text{m}$ .

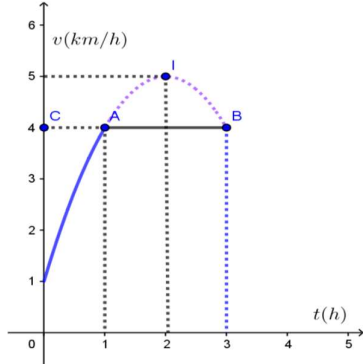
**Câu 38.** Một ô tô đang chạy với vận tốc  $10$  (m/s) thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = -2t + 10$  (m/s), trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô đi được trong  $8$  giây cuối cùng.

- A.  $55$  (m).      B.  $25$  (m).      C.  $50$  (m).      D.  $16$  (m).

**Câu 39.** Hai người  $A, B$  đang chạy xe ngược chiều nhau thì xảy ra va chạm, hai xe tiếp tục di chuyển theo chiều của mình thêm một quãng đường nữa thì dừng hẳn. Biết rằng sau khi va chạm, một người di chuyển tiếp với vận tốc  $v_1(t) = 6 - 3t$  mét trên giây, người còn lại di chuyển với vận tốc  $v_2(t) = 12 - 4t$  mét trên giây. Tính khoảng cách hai xe khi đã dừng hẳn.

- A. 25 mét.                      B. 22 mét.                      C. 20 mét.                      D. 24 mét.

**Câu 40.** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc  $v(\text{km/h})$  phụ thuộc vào thời gian  $t(\text{h})$  có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh  $I(2;5)$  và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



- A. 15 (km).                      B.  $\frac{32}{3}$  (km).                      C. 12 (km).                      D.  $\frac{35}{3}$  (km).

**D. SỐ PHỨC.**

**Vấn đề 1. Câu hỏi lý thuyết.**

**Câu 1.** Cho hai số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) và  $z' = a' + b'i$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Điều kiện giữa  $a, b, a', b'$  để  $z + z'$  là một số ảo là

- A.  $b + b' = 0$ .                      B.  $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' \neq 0 \end{cases}$ .                      C.  $\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' = 0 \end{cases}$ .                      D.  $a + a' = 0$ .

**Câu 2.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) tùy ý. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Mô đun của  $z$  là một số thực dương.  
 B.  $z^2 = |z|^2$ .  
 C. Số phức liên hợp của  $z$  có mô đun bằng mô đun của số phức  $iz$ .  
 D. Điểm  $M(-a; b)$  là điểm biểu diễn của  $\bar{z}$ .

**Câu 3.** Cho số phức  $z = a + bi$  với  $a, b$  là các số thực bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Phần ảo của  $z$  là  $bi$ .                      B. Mô đun của  $z^2$  bằng  $a^2 + b^2$ .  
 C.  $z - \bar{z}$  không phải là số thực.                      D. Số  $z$  và  $\bar{z}$  có mô đun khác nhau.

**Câu 4.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0$ ). Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.  $z - \bar{z} \in \mathbb{R}$ .                      B.  $z^2 = |z|^2$ .                      C.  $|\bar{z} \cdot z^{-1}| = 1$ .                      D.  $|z \cdot \bar{z}| = |z|^2$ .

**Câu 5.** Cho hai số phức  $z$  và  $z'$ . Trong các mệnh đề sai, mệnh đề nào **sai**?

- A.  $|z + z'| = |z| + |z'|$ .                      B.  $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ .                      C.  $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$ .                      D.  $\bar{z} + \bar{z'} = \overline{z + z'}$ .

**Câu 6.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .      B.  $\bar{z} = a - bi$ .      C.  $z^2$  là số thực.      D.  $z\bar{z}$  là số thực.

### Vấn đề 2. Các phép toán số phức.

**Câu 7.** Xác định phần ảo của số phức  $z = 18 - 12i$ .

- A.  $-12$ .      B.  $18$ .      C.  $12$ .      D.  $-12i$ .

**Câu 8.** Số phức liên hợp của số phức  $z = 1 - 2i$  là

- A.  $1 + 2i$       B.  $-1 - 2i$       C.  $2 - i$       D.  $-1 + 2i$

**Câu 9.** Tính môđun của số phức  $z = 4 - 3i$ .

- A.  $|z| = 7$ .      B.  $|z| = \sqrt{7}$ .      C.  $|z| = 5$ .      D.  $|z| = 25$ .

**Câu 10.** Cho số phức  $z_1 = 1 + i$  và  $z_2 = 2 - 3i$ . Tìm số phức liên hợp của số phức  $w = z_1 + z_2$ ?

- A.  $\bar{w} = 3 - 2i$ .      B.  $\bar{w} = 1 - 4i$ .      C.  $\bar{w} = -1 + 4i$ .      D.  $\bar{w} = 3 + 2i$ .

**Câu 11.** Tính môđun của số phức  $z = (1 - 2i)[2 + i + i(3 - 2i)]$ .

- A.  $|z| = 4\sqrt{10}$ .      B.  $|z| = 4\sqrt{5}$ .      C.  $|z| = 160$ .      D.  $|z| = 2\sqrt{10}$ .

**Câu 12.** Biết  $\frac{1}{3 + 4i} = a + bi$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Tính  $ab$ .

- A.  $\frac{12}{625}$ .      B.  $-\frac{12}{625}$ .      C.  $-\frac{12}{25}$ .      D.  $\frac{12}{25}$ .

**Câu 13.** Cho số phức  $z = 1 + i$ . Khi đó  $|z^3|$  bằng

- A.  $\sqrt{2}$ .      B.  $2\sqrt{2}$ .      C.  $4$ .      D.  $1$ .

**Câu 14.** Tính môđun của số phức là nghịch đảo của số phức  $z = (1 - 2i)^2$ .

- A.  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .      B.  $\sqrt{5}$ .      C.  $\frac{1}{25}$ .      D.  $\frac{1}{5}$ .

**Câu 15.** Cho số phức  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Tìm số phức  $w = 1 + z + z^2$ .

- A.  $2 - \sqrt{3}i$ .      B.  $1$ .      C.  $0$ .      D.  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

**Câu 16.** Tính  $P = |1 + \sqrt{3}i|^{2018} + |1 - \sqrt{3}i|^{2018}$ .

- A.  $P = 2$       B.  $P = 2^{1010}$       C.  $P = 2^{2019}$       D.  $P = 4$

**Câu 17.** Tính  $S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2017} + i^{2018}$

- A.  $S = -i$ .      B.  $S = 1 + i$ .      C.  $S = 1 - i$ .      D.  $S = i$ .

**Câu 18.** Tính  $S = 1009 + i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2017i^{2017}$ .

- A.  $S = 2017 - 1009i$ .      B.  $1009 + 2017i$ .      C.  $2017 + 1009i$ .      D.  $1008 + 1009i$ .

**Câu 19.** Cho các số phức  $z_1, z_2, z_3$  thỏa mãn:  $|z_1| = 4, |z_2| = 3, |z_3| = 2$  và  $|4z_1z_2 + 16z_2z_3 + 9z_1z_3| = 48$ .

Giá trị của biểu thức  $P = |z_1 + z_2 + z_3|$  bằng:

- A.  $1$       B.  $8$ .      C.  $2$       D.  $6$



**Câu 20.** Cho các số phức  $z_1, z_2, z_3$  thỏa mãn 2 điều kiện  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2017$  và  $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ .

Tính  $P = \left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3} \right|$ .

- A.  $P = 2017$ .                      B.  $P = 1008,5$ .                      C.  $P = 2017^2$ .                      D.  $P = 6051$ .

**Câu 21.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = \left| 1 + \frac{5i}{z} \right|$ .

- A. 5.                                      B. 4.                                      C. 6.                                      D. 8.

**Câu 22.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |1+z| + 3|1-z|$ .

- A.  $3\sqrt{15}$ .                              B.  $6\sqrt{5}$ .                              C.  $\sqrt{20}$ .                              D.  $2\sqrt{20}$ .

**Câu 23.** Trong các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-i| = |\bar{z} - 2 - 3i|$ . Tìm số phức  $z$  có môđun nhỏ nhất.

- A.  $z = \frac{27}{5} + \frac{6}{5}i$ .                              B.  $z = -\frac{6}{5} - \frac{27}{5}i$ .                              C.  $z = -\frac{6}{5} + \frac{27}{5}i$ .                              D.  $z = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$ .

**Câu 24.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn đồng thời hai điều kiện  $|z-3-4i| = \sqrt{5}$  và biểu thức

$M = |z+2|^2 - |z-i|^2$  đạt giá trị lớn nhất. Môđun của số phức  $z-2-i$  bằng

- A.  $\sqrt{5}$ .                                      B. 9.                                      C. 25.                                      D. 5.

**Vấn đề 3. Phương trình bậc nhất - bậc hai trong tập số phức**

**Câu 25.** Trên tập số phức, cho phương trình:  $az^2 + bz + c = 0$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ). Chọn kết luận sai.

- A. Nếu  $b = 0$  thì phương trình có hai nghiệm mà tổng bằng 0.  
 B. Nếu  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  thì phương trình có hai nghiệm mà môđun bằng nhau.  
 C. Phương trình luôn có hai nghiệm phức là liên hợp của nhau.  
 D. Phương trình luôn có nghiệm.

**Câu 26.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(2-i)z - 2 = 2 + 3i$ . Môđun của  $z$  là:

- A.  $|z| = 5$ .                                      B.  $|z| = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ .                                      C.  $|z| = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ .                                      D.  $|z| = \sqrt{5}$ .

**Câu 27.** Tìm môđun của số phức  $z$  thỏa  $3iz + (3-i)(1+i) = 2$ .

- A.  $|z| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .                                      B.  $|z| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .                                      C.  $|z| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .                                      D.  $|z| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 28.** Tính môđun của số phức  $z$  biết  $(1+2i)z^2 = 3+4i$ .

- A.  $|z| = \sqrt{5}$ .                                      B.  $|z| = \sqrt[4]{5}$ .                                      C.  $|z| = 2\sqrt{5}$ .                                      D.  $|z| = 5$ .

**Câu 29.** Phương trình  $z^2 + 3z + 9 = 0$  có hai nghiệm phức  $z_1, z_2$ . Tính  $S = z_1 z_2 + z_1 + z_2$ .

- A.  $S = -6$ .                                      B.  $S = 6$ .                                      C.  $S = 12$ .                                      D.  $S = -12$ .

**Câu 30.** Gọi  $z_1$  và  $z_2$  là hai nghiệm phức của phương trình  $z^2 - 6z + 11 = 0$ . Giá trị của biểu thức  $|3z_1| - |z_2|$  bằng

- A. 22.                                      B. 11.                                      C.  $2\sqrt{11}$ .                                      D.  $\sqrt{11}$ .

**Câu 31.** Gọi  $z_1, z_2$  là hai nghiệm phức của phương trình  $z^2 - 2z + 2 = 0$ . Tính  $T = |z_1^{2018}| + |z_2^{2018}|$

- A.  $T = 0$ .                      B.  $T = 2^{2019}$ .                      C.  $T = 1$ .                      D.  $T = 2^{1010}$ .

**Câu 32.** Cho  $m$  là số thực, biết phương trình  $z^2 + mz + 5 = 0$  có hai nghiệm phức trong đó có một nghiệm có phần ảo là 1. Tính tổng môđun của hai nghiệm.

- A. 3                      B.  $\sqrt{5}$                       C.  $2\sqrt{5}$                       D. 4

**Câu 33.** Tìm tổng các giá trị của tham số thực  $a$  sao cho phương trình  $z^2 + 3z + a^2 - 2a = 0$  có nghiệm phức  $z_0$  thỏa  $|z_0| = 2$ .

- A. 0.                      B. 2.                      C. 6.                      D. 4.

**Vấn đề 4. Điều kiện của bài toán có chứa modul, số phức liên hợp...**

**Câu 34.** Nếu 2 số thực  $x, y$  thỏa:  $x(3 + 2i) + y(1 - 4i) = 1 + 24i$  thì  $x + y$  bằng

- A. 4.                      B. 3.                      C. 2.                      D. -3.

**Câu 35.** Tìm số thực  $m$  sao cho  $(m^2 - 1) + (m + 1)i$  là số ảo.

- A.  $m = 0$ .                      B.  $m = 1$ .                      C.  $m = \pm 1$ .                      D.  $m = -1$ .

**Câu 36.** Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa mãn  $(1 + i)z + (2 - i)\bar{z} = 13 + 2i$ ?

- A. 4.                      B. 3.                      C. 2.                      D. 1.

**Câu 37.** Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = |z + \bar{z}| = 1$ ?

- A. 0.                      B. 1.                      C. 4.                      D. 3.

**Câu 38.** Tìm số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 3| = |z - 1|$  và  $(z + 2)(\bar{z} - i)$  là số thực

- A.  $z = 2$                       B.  $z = -2 + 2i$                       C.  $z = 2 - 2i$                       D. không có  $z$

**Câu 39.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ) thỏa mãn  $|z + 2 + 5i| = 5$  và  $z\bar{z} = 82$ . Tính giá trị của  $P = a + b$ .

- A. 10                      B. -8                      C. -35                      D. -7

**Câu 40.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $z + 1 + 3i - |z|i = 0$ . Tính  $S = a + 3b$ .

- A.  $S = \frac{7}{3}$ .                      B.  $S = -5$ .                      C.  $S = 5$ .                      D.  $S = -\frac{7}{3}$ .

**Câu 41.** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = 1, |z_2| = 2$  và  $|z_1 + z_2| = 3$ . Giá trị của  $|z_1 - z_2|$  là

- A. 0.                      B. 1.                      C. 2.                      D. 3.

**Câu 42.** Tìm môđun của số phức  $z$  biết  $z - 4 = (1 + i)|z| - (4 + 3z)i$ .

- A.  $|z| = \frac{1}{2}$ .                      B.  $|z| = 2$ .                      C.  $|z| = 4$ .                      D.  $|z| = 1$ .

**Câu 43.** Tính môđun của số phức  $z$  thỏa mãn:  $3z\bar{z} + 2017(z - \bar{z}) = 48 - 2016i$ .

- A.  $|z| = 4$ .                      B.  $|z| = \sqrt{2016}$ .                      C.  $|z| = \sqrt{2017}$ .                      D.  $|z| = 2$ .

**Câu 44.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $\frac{1+i}{z}$  là số thực và  $|z - 2| = m$  với  $m \in \mathbb{R}$ . Gọi  $m_0$  là một giá trị của  $m$  để có đúng một số phức thỏa mãn bài toán. Khi đó:

- A.  $m_0 \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ .                      B.  $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ .                      C.  $m_0 \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$ .                      D.  $m_0 \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$ .

Vấn đề 5. Điểm biểu diễn của số phức

**Câu 45.** Giả sử  $A, B$  theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức  $z_1, z_2$ . Khi đó độ dài đoạn  $AB$  bằng

- A.  $|z_2 + z_1|$ .                      B.  $|z_2 - z_1|$ .                      C.  $|z_1| + |z_2|$ .                      D.  $|z_1| - |z_2|$ .

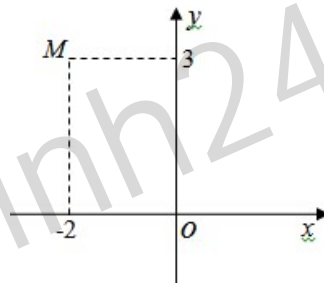
**Câu 46.** Trong mặt phẳng phức, gọi  $M$  là điểm biểu diễn cho số phức  $(z - \bar{z})^2$  với  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ ). Chọn kết luận **đúng**.

- A.  $M$  thuộc tia  $Ox$ .                      B.  $M$  thuộc tia  $Oy$ .  
C.  $M$  thuộc tia đối của tia  $Ox$ .                      D.  $M$  thuộc tia đối của tia  $Oy$ .

**Câu 47.** Điểm  $M(3; -1)$  là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

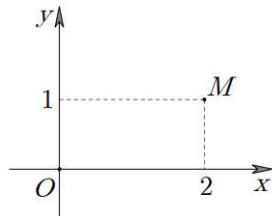
- A.  $z = -1 + 3i$                       B.  $z = 1 - 3i$                       C.  $z = 3 - i$                       D.  $z = -3 + i$

**Câu 48.** Điểm  $M$  trong hình vẽ dưới đây biểu thị cho số phức nào?



- A.  $3 - 2i$ .                      B.  $-2 + 3i$ .                      C.  $2 - 3i$ .                      D.  $3 + 2i$ .

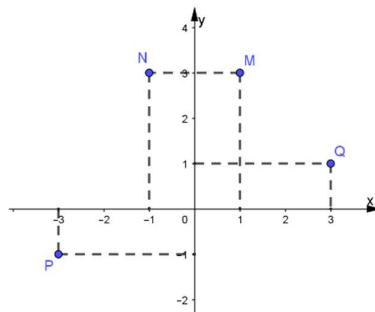
**Câu 49.** Trong hình vẽ dưới đây,  $M$  là điểm biểu diễn của số phức  $z$ .



Số phức  $\bar{z}$  là

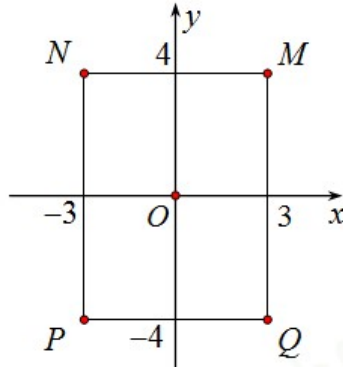
- A.  $2 - i$ .                      B.  $1 + 2i$ .                      C.  $1 - 2i$ .                      D.  $2 + i$ .

**Câu 50.** Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn của số phức  $z = (1 + i)(2 - i)$  ?



- A.  $P$ .                      B.  $M$ .                      C.  $N$ .                      D.  $Q$ .

**Câu 51.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(2+i)z=10-5i$ . Hỏi điểm biểu diễn số phức  $z$  là điểm nào trong các điểm  $M, N, P, Q$  trong hình vẽ sau?



- A. Điểm  $Q$ .                      B. Điểm  $M$ .                      C. Điểm  $P$ .                      D. Điểm  $N$ .

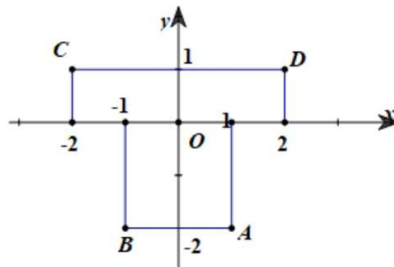
**Câu 52.** Cho số phức  $z=2-i$ . Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tìm điểm biểu diễn số phức  $w=iz$ .

- A.  $M(-1;2)$ .                      B.  $M(2;-1)$ .                      C.  $M(2;1)$ .                      D.  $M(1;2)$ .

**Câu 53.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $iz+2-i=0$ . Khoảng cách từ điểm biểu diễn của  $z$  trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  đến điểm  $M(3;-4)$  là

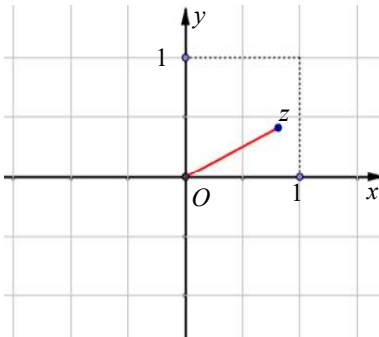
- A.  $2\sqrt{5}$ .                      B.  $\sqrt{13}$ .                      C.  $2\sqrt{10}$ .                      D.  $2\sqrt{2}$ .

**Câu 54.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $z-(2+3i)\bar{z}=1-9i$ . Số phức  $w=\frac{5}{iz}$  có điểm biểu diễn là điểm nào trong các điểm  $A, B, C, D$  ở hình vẽ sau?

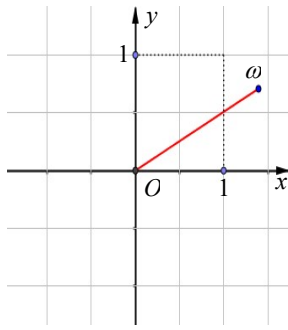


- A. Điểm  $D$ .                      B. Điểm  $C$ .                      C. Điểm  $B$ .                      D. Điểm  $A$ .

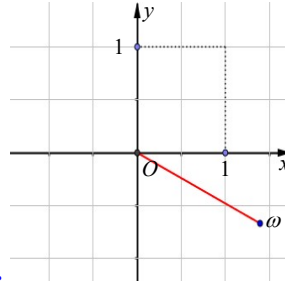
**Câu 55.** Số phức  $z$  được biểu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  như hình vẽ:



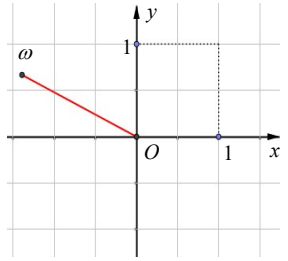
Trong các hình dưới đây, hình nào có thể là điểm biểu diễn của số phức  $w=\frac{i}{z}$ ?



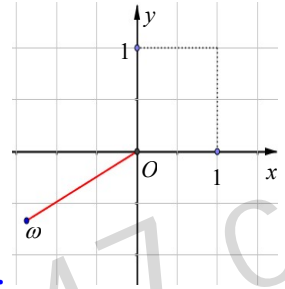
A.



B.



C.



D.

### Vấn đề 6. Vận dụng các tính chất hình học để giải toán về số phức

**Câu 56.** Cho  $A, B, C$  tương ứng là các điểm trong mặt phẳng  $Oxy$  biểu diễn các số  $z_1 = 1 + 2i$ ,  $z_2 = -2 + 5i$ ,  $z_3 = 2 + 4i$ . Số phức  $z$  biểu diễn bởi điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành là

A.  $-1 + 7i$ .      B.  $5 + i$ .      C.  $1 + 5i$ .      D.  $3 + 5i$ .

**Câu 57.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , gọi  $M$  là điểm biểu diễn số phức  $z = 3 - 4i$ ;  $M'$  là điểm biểu diễn cho số phức  $z' = \frac{1+i}{2}z$ . Tính diện tích tam giác  $OMM'$ .

A.  $S_{\Delta OMM'} = \frac{25}{4}$ .      B.  $S_{\Delta OMM'} = \frac{25}{2}$ .      C.  $S_{\Delta OMM'} = \frac{15}{4}$ .      D.  $S_{\Delta OMM'} = \frac{15}{2}$ .

**Câu 58.** Cho các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = 3$ ,  $|z_2| = 4$ ,  $|z_1 - z_2| = 5$ . Gọi  $A, B$  lần lượt là các điểm biểu diễn số phức  $z_1, z_2$  trên mặt phẳng tọa độ. Tính diện tích  $S$  của  $\Delta OAB$  với  $O$  là gốc tọa độ.

A.  $S = 5\sqrt{2}$ .      B.  $S = 6$ .      C.  $S = \frac{25}{2}$ .      D.  $S = 12$ .

**Câu 59.** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = |z_2| = 1$ . Khi đó  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$  bằng

A. 2.      B. 4.      C. 1.      D. 0.

**Câu 60.** Cho  $A, B$  là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự  $z_0, z_1$  khác 0 và thỏa mãn đẳng thức  $z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1$ . Tam giác  $OAB$  là tam giác gì? Chọn phương án đúng nhất.

A. Đều      B. Cân tại  $O$       C. Vuông tại  $O$       D. Vuông cân tại  $O$

**Câu 61.** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = 6, |z_2| = 2$ . Gọi  $M, N$  là các điểm biểu diễn cho  $z_1$  và  $iz_2$ . Biết  $\widehat{MON} = 60^\circ$ . Tính  $T = |z_1^2 + 9z_2^2|$ .

A.  $T = 18$ .      B.  $T = 24\sqrt{3}$ .      C.  $T = 36\sqrt{2}$ .      D.  $T = 36\sqrt{3}$ .

**Câu 62.** Trên mặt phẳng  $Oxy$ , tập hợp các điểm biểu diễn các số phức  $z = x + yi$  thỏa mãn  $|z + 2 + i| = |\bar{z} - 3i|$  là đường thẳng có phương trình là

A.  $y = x + 1$ .      B.  $y = -x + 1$ .      C.  $y = -x - 1$ .      D.  $y = x - 1$ .

**Câu 63.** Cho số phức  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $z + 2 - i - |z|(1 - i) = 0$ . Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , điểm  $M$  là điểm biểu diễn của số phức  $z$ . Hỏi  $M$  thuộc đường thẳng có phương trình nào sau đây?

- A.  $x - y + 5 = 0$ .                      B.  $x - y + 2 = 0$ .                      C.  $x + y - 2 = 0$ .                      D.  $x + y + 1 = 0$ .

**Câu 64.** Trên mặt phẳng  $Oxy$ , tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - i| = |iz|$  là

- A. Đường thẳng  $y = 2$ .                      B. Đường thẳng  $y = -\frac{1}{2}$ .  
C. Đường thẳng  $y = \frac{1}{2}$ .                      D. Đường tròn tâm  $I(0; 1)$ .

**Câu 65.** Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức  $z$  thỏa mãn:  $|\bar{z} + 2 - i| = 4$  là đường tròn có tâm  $I$  và bán kính  $R$  lần lượt là

- A.  $I(-2; -1); R = 4$ .                      B.  $I(-2; -1); R = 2$ .                      C.  $I(2; -1); R = 4$ .                      D.  $I(2; -1); R = 2$ .

**Câu 66.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z - 3 + 4i| \leq 2$ . Trong mặt phẳng  $Oxy$  tập hợp điểm biểu diễn số phức  $w = 2z + 1 - i$  là hình tròn có diện tích là

- A.  $S = 9\pi$ .                      B.  $S = 12\pi$ .                      C.  $S = 16\pi$ .                      D.  $S = 25\pi$ .

**Câu 67.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , tập hợp các điểm biểu diễn các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $\left| \frac{z}{z-1} \right| = 3$  là

- A. Đường tròn  $x^2 + y^2 - \frac{9}{4}x - \frac{9}{8} = 0$ .                      B. Đường tròn  $x^2 + y^2 - \frac{9}{4}x + \frac{9}{8} = 0$ .  
C. Đường tròn  $x^2 + y^2 + \frac{9}{4}x + \frac{9}{8} = 0$ .                      D. Đường tròn tâm  $I\left(0; \frac{9}{8}\right)$  và  $R = \frac{1}{8}$ .

**Câu 68.** Cho các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - i| = 5$ . Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn số phức  $w = iz + 1 - i$  là đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

- A.  $r = 20$ .                      B.  $r = 22$ .                      C.  $r = 4$ .                      D.  $r = 5$ .

**Câu 69.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $(z - 2 + i)(\bar{z} - 2 - i) = 25$ . Biết tập hợp các điểm  $M$  biểu diễn số phức  $w = 2\bar{z} - 2 + 3i$  là đường tròn tâm  $I(a; b)$  và bán kính  $c$ . Giá trị của  $a + b + c$  bằng

- A. 17.                      B. 20.                      C. 10.                      D. 18.

**Câu 70.** Tìm tập hợp các điểm biểu diễn các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $|z - 2| + |z + 2| = 10$ .

- A. Đường tròn  $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$ .                      B. Elip  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ .  
C. Đường tròn  $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 10$ .                      D. Elip  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$ .

**Câu 71.** Có bao nhiêu số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $\begin{cases} |iz - i + 1| = 2 \\ |z - 1| = |z + 2i| \end{cases}$  ?

- A. 2.                      B. 0.                      C. Có vô số số.                      D. 1.

**Câu 72.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 1| = 2$ . Gọi  $M$  và  $m$  là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của  $|z|$ . Tính  $M + m$ .

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

**Câu 73.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z-1+2i|=3$ . Tìm môđun nhỏ nhất của số phức  $z-1+i$ .

A. 4.

B.  $2\sqrt{2}$ .

C. 2.

D.  $\sqrt{2}$ .

**Câu 74.** Cho các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z|=2$ . Đặt  $w=(1+2i)z-1+2i$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $|w|$ .

A. 2.

B.  $3\sqrt{5}$ .

C.  $2\sqrt{5}$ .

D.  $\sqrt{5}$ .

**Câu 75.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn:  $|z+2i-1|=|z+i|$ . Trong mặt phẳng  $Oxy$ ,  $z$  được biểu diễn bởi điểm  $M$ . Tìm  $z$  sao cho độ dài đoạn  $MA$  ngắn nhất với  $A(1,3)$ .

A.  $3+i$ .

B.  $1+3i$ .

C.  $2-3i$ .

D.  $-2+3i$ .

**Câu 76.** Nếu  $z$  là số phức thỏa  $|\bar{z}|=|z+2i|$  thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $|z-i|+|z-4|$  là

A. 2.

B.  $\sqrt{3}$ .

C. 4.

D. 5.

**Câu 77.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $5|z-i|=|z+1-3i|+3|z-1+i|$ . Tìm giá trị lớn nhất  $M$  của  $|z-2+3i|$  ?

A.  $M = \frac{10}{3}$

B.  $M = 1 + \sqrt{13}$

C.  $M = 4\sqrt{5}$

D.  $M = 9$

**Câu 78.** Cho số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1|=12$  và  $|z_2-3-4i|=5$ . Giá trị nhỏ nhất của  $|z_1-z_2|$  là

A. 0.

B. 2

C. 7

D. 17

**Câu 79.** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $P = \left| \frac{z+i}{z} \right|$ , với  $z$  là số phức khác 0 và thỏa mãn  $|z| \geq 2$ . Tính tỷ số  $\frac{M}{m}$ .

A.  $\frac{M}{m} = 5$

B.  $\frac{M}{m} = 3$

C.  $\frac{M}{m} = \frac{3}{4}$

D.  $\frac{M}{m} = \frac{1}{3}$