

Bài 1. (2,5 điểm) Cho các phương trình $x^2 - 2ax + 3a = 0$ (1) và $x^2 - 4x + a = 0$ (2), trong đó a là tham số.

- Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.
- Giả sử cả hai phương trình trên đều có hai nghiệm phân biệt. Gọi T_1, T_2 lần lượt là tổng bình phương các nghiệm của (1), (2). Chứng minh $T_1 + 5T_2 > 68$.

Bài 2. (1,5 điểm) Cho các số dương $a \geq b \geq c$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh

$$\sqrt{4 + (b+c)^2} \leq 2a + b + c \leq \sqrt{4 + 4a^2}.$$

Bài 3. (1,5 điểm) Cho phương trình $2^x + 5^y = k^2$, (x, y, k là các số nguyên dương).

- Chứng minh rằng với mọi k , phương trình không có nghiệm (x, y) với y chẵn.
- Tìm k để phương trình có nghiệm.

Bài 4. (3 điểm) Cho tam giác ABC nhọn có H là trực tâm. Lấy D đối xứng với H qua A. Gọi I là trung điểm CD, đường tròn (I) đường kính CD cắt AB tại các điểm E, F (E thuộc tia AB).

- Chứng minh $\widehat{ECD} = \widehat{FCH}$ và $AE = AF$.
- Chứng minh H là trực tâm của tam giác CEF.
- Gọi K là giao điểm BH và AC. Chứng minh tứ giác EFKH nội tiếp và EF là tiếp tuyến chung của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác CKE và CKF.
- Chứng minh rằng tiếp tuyến tại C của (I) và tiếp tuyến tại K của đường tròn ngoại tiếp tam giác KEF cắt nhau trên đường thẳng AB.

Bài 5. (1,5 điểm) Cho dãy các số nguyên $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{21} \geq a_{22}$ thỏa mãn các điều kiện:

- $|a_i| \leq 11$ và $a_i \neq 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, 22$.
 - $a_1 + a_2 + \dots + a_{21} + a_{22} = 1$
- Chứng minh $a_1, a_2 > 0$.
 - Chứng minh rằng từ a_2, a_3, \dots, a_{22} có thể chọn ra $k \geq 1$ số hạng âm sao cho tổng S của chúng thỏa mãn $-10 \leq a_1 + S \leq 0$.
 - Chứng minh rằng từ dãy đã cho có thể chọn ra $n \geq 1$ số hạng để tổng của chúng bằng 0.

HẾT

Thí sinh không được sử dụng tài liệu; Giám thị không giải thích đề thi.

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh: