ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU
HỘI ĐỒNG TUYỂN SINH LỚP 10
NĂM HỌC 2023-2024

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
Năm học 2023 – 2024
Môn thi: Toán chuyên
Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian phát đề

Bài 1. (1 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+y)\left(4+\dfrac{1}{xy}\right)=1\\ \left(4x+\dfrac{1}{x}\right)\left(4y+\dfrac{1}{y}\right)=-20\end{cases}$$

Bài 2. (2 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $ab+bc+ca=abc$.

a) Chứng minh $\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{c}}\le\sqrt{3}$.

b) Chứng minh $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\le abc\le\dfrac{(a+b+c)^2}{3}$.

Bài 3. (1.5 điểm) Người ta tô màu mỗi ô của bảng hình vuông 4×4 bằng một trong hai màu đen hoặc trắng thỏa mãn các điều kiện sau:

i. Số ô đen trên các hàng đều bằng nhau.
ii. Số ô đen trên các cột đôi một khác nhau.

a) Tính số ô đen trên mỗi hàng.
b) Hai ô kề nhau trên một hàng hoặc một cột được gọi là "cặp tốt" nếu chúng được tô bằng hai màu khác nhau. Hỏi tổng số các "cặp tốt" tính theo tất cả các cột có thể lớn nhất là bao nhiêu? Hỏi tương tự cho các "cặp tốt" tính theo tất cả các hàng.

Bài 4. (2 điểm) Cho m, n là các số nguyên không âm thỏa mãn $m^2-n=1$.

a) Đặt $n^2-m=a$. Chứng minh rằng a là số lẻ.
b) Chứng minh rằng nếu $a=3.2^k+1$ với k là số nguyên dương thì $k=1$.
c) Chứng minh rằng a không thể là số chính phương.

Bài 5. (3.5 điểm) Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F là các tiếp điểm của đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC với BC, CA, AB. Từ chân đường phân giác ngoài L của góc $\widehat{BAC}$ (L thuộc BC), kẻ tiếp tuyến LH đến đường tròn (I) (H thuộc (I), $H\neq D$).

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ALH đi qua tâm nội tiếp I.
b) Chứng minh $\widehat{BAD}=\widehat{CAH}$.
c) AH cắt lại (I) tại K. Gọi G là trọng tâm tam giác KEF và J là giao điểm của DG với EF. Chứng minh $KJ\perp EF$.
d) Gọi S là trung điểm BC, KJ cắt lại (I) tại R. Chứng minh rằng EF, IR và AS đồng quy.

HẾT