

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÁI BÌNH
ĐỀ CHÍNH THỨC**

**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN THÁI BÌNH
NĂM HỌC 2019 – 2020
Môn thi: TOÁN (Hệ Chuyên Toán, Tin)
Thời gian làm bài: 120 phút**

Mục tiêu:

- +) Đề thi bao gồm 5 bài tập tự luận ở các mức độ vận dụng và vận dụng cao.
- +) Các dạng bài trong đề thi đòi hỏi các em phải vận dụng linh hoạt các kiến thức lớp 9 nâng cao đã được học.
- +) Các câu hỏi trong đề thi giúp các em ôn thi và làm quen với các dạng bài sẽ gặp trong các đề thi vào trường Chuyên.

Câu 1 (VD) (2 điểm): Cho các số thực $a, b \neq 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 b^4} + \frac{4}{ab}$.

2. Chứng minh rằng: $(a + b - 2)^3 - (a - 1)^3 - (b - 1)^3 - 3(a + b) + 6 = 0$.

Câu 2 (VD) (2 điểm):

1. Giải phương trình: $\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x-1} = 3x - 3\sqrt{(x+2)(x-1)}$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y + 2\sqrt{x^2 + y} = 4x + 3 \\ (x-3)\sqrt{y+4} + (y-4)\sqrt{x-1} + 2 = 0 \end{cases}$$

Câu 3 (VD) (3,5 điểm):

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R . Trên cung nhỏ AD lấy điểm E bất kì ($E \neq A, D$). Tia EB cắt các đường thẳng AD, AC lần lượt tại I và K . Tia EC cắt các đường thẳng DA, DB lần lượt tại M và N . Hai đường thẳng AN, DK cắt nhau tại P .

1. Chứng minh: Tứ giác $EPND$ nội tiếp một đường tròn.

2. Chứng minh: $\angle EKM = \angle DKM$.

3. Khi M là trung điểm của AD , tính độ dài đoạn thẳng AE theo R .

Câu 4 (VD) (1 điểm):

Tìm các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2020}$.

Câu 5 (VDC) (1 điểm):

1. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} 0 < a, b, c < \frac{1}{2} \\ 2a + 3b + 4c = 3 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{a(3b + 4c - 2)} + \frac{9}{b(4a + 8c - 3)} + \frac{8}{c(2a + 3b - 1)}.$$

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm $M(a; b)$ được gọi là điểm nguyên nếu cả a và b đều là số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại điểm I trong mặt phẳng tọa độ và 2019 số thực dương $R_1; R_2; \dots; R_{2019}$ sao cho có đúng k điểm nguyên nằm trong đường tròn $(I; R_k)$ với mọi k là số nguyên dương không vượt quá 2019.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN BỞI BAN CHUYÊN MÔN TUYENSINH247.COM

Sưu tầm: Đáp án môn Toán trường THPT chuyên Thái Bình của Sở GD&ĐT Thái Bình.

Câu 1:

Phương pháp:

1. Biến đổi biểu thức bài cho về biểu thức có chứa biểu thức theo bài cho để thế vào và tính giá trị biểu thức.
2. Sử dụng hằng đẳng thức: $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ và giả thiết để biến đổi biểu thức VT và chứng minh VT = 0.

Cách giải:

Cho các số thực $a, b \neq 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

1. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 b^4} + \frac{4}{ab}$.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 b^4} + \frac{4}{ab} = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \right)^2 + \frac{4}{ab} = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right)^2 + \frac{4}{ab} \\
 &= \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)^2 + \frac{4}{ab} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 + \frac{4}{ab} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 + \frac{4}{ab} \\
 &= \frac{1}{a^2} - \frac{2}{ab} + \frac{1}{b^2} + \frac{4}{ab} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 = 1.
 \end{aligned}$$

2. Chứng minh rằng: $(a+b-2)^3 - (a-1)^3 - (b-1)^3 - 3(a+b) + 6 = 0$.

Theo đề bài ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Leftrightarrow a+b=ab$

$$\Rightarrow ab - a - b = 0 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 = 1 \Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 1.$$

Áp dụng hằng đẳng thức: $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$ ta có:

$$[(a-1) + (b-1)]^3 = (a-1)^3 + (b-1)^3 + 3(a-1)(b-1)[(a-1) + (b-1)]$$

$$\Leftrightarrow (a+b-2)^3 = (a-1)^3 + (b-1)^3 + 3.1(a+b-2)$$

$$\Leftrightarrow (a+b-2)^3 - (a-1)^3 - (b-1)^3 - 3(a+b) + 6 = 0 \text{ (dpcm)}.$$

Câu 2:

Phương pháp:

1. Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

+) Biến đổi phương trình đã cho sau đó giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

+) Giải tìm nghiệm, đối chiếu với điều kiện xác định rồi kết luận.

2. Đặt điều kiện để hệ phương trình có nghĩa.

+) Biến đổi phương trình (1) sau đó thế vào phương trình (2), biến đổi phương trình (2) về dạng phương trình 1 ẩn x.

+) Sau đó thế vào tìm ẩn y. Đối chiếu với điều kiện xác định rồi kết luận.

Cách giải:

1. Giải phương trình: $\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x-1} = 3x - 3\sqrt{(x+2)(x-1)}.$

Điều kiện: $x \geq 1$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x-1} &= 3x - 3\sqrt{(x+2)(x-1)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x-1} &= x+2 + 2x-2 - 3\sqrt{(x+2)(x-1)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x-1} &= (x+2) + 2(x-1) - 3\sqrt{(x+2)(x-1)} \quad (*)\end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+2} \quad (a \geq 0) \\ b = \sqrt{x-1} \quad (b \geq 0) \end{cases}$. Khi đó ta có phương trình:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow a - 2b = a^2 + 2b^2 - 3ab \\ &\Leftrightarrow a^2 + 2b^2 - 2ab - ab - a + 2b = 0 \\ &\Leftrightarrow (a^2 - 2ab) + (2b^2 - ab) - (a - 2b) = 0 \\ &\Leftrightarrow a(a - 2b) - b(b - 2b) - (a - 2b) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a - 2b)(a - b - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 0 \\ a - b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = b + 1 \end{cases}\end{aligned}$$

+) Với $a = 2b \Rightarrow \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x+2 = 4x-4 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (tm)}$

+) Với $a = b + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt{x-1} + 1 \Leftrightarrow x+2 = x-1+1+2\sqrt{x-1}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (tm)}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y + 2\sqrt{x^2 + y} = 4x + 3 \\ (x-3)\sqrt{y+4} + (y-4)\sqrt{x-1} + 2 = 0 \end{cases}$$

Điều kiện: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ y+4 \geq 0 \\ x^2 + y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -4 \\ x^2 + y \geq 0 \end{cases} \quad (*)$

$$\begin{cases} y + 2\sqrt{x^2 + y} = 4x + 3 & (1) \\ (x-3)\sqrt{y+4} + (y-4)\sqrt{x-1} + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + y + 2\sqrt{x^2 + y + 1} = x^2 + 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + y + 1})^2 = (x + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x^2 + y + 1}| = |x + 2|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y + 1} = x + 2 \\ \sqrt{x^2 + y + 1} = -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y} = x + 1 \\ \sqrt{x^2 + y} = -x - 3 \end{cases}$$

Với $x \geq -1 \Rightarrow -x - 3 < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y} = -x - 3$ (ktm).

Xét $\sqrt{x^2 + y} = x + 1$ ta được:

$$\sqrt{x^2 + y} = x + 1 \Leftrightarrow x^2 + y = (x + 1)^2 \Leftrightarrow y = 2x + 1.$$

Thế vào phương trình (2) ta được:

$$(x - 3)\sqrt{2x + 1 + 4} + (2x + 1 - 4)\sqrt{x - 1} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)\sqrt{2x + 5} + (2x - 3)\sqrt{x - 1} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)\sqrt{2x + 5} - 3(x - 3) + (2x - 3)\sqrt{x - 1} - (2x - 3) + 5x - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(\sqrt{2x + 5} - 3) + (2x - 3)(\sqrt{x - 1} - 1) + 5(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 3)(2x + 5 - 9)}{\sqrt{2x + 5} + 3} + \frac{(2x - 3)(x - 1 - 1)}{\sqrt{x - 1} + 1} + 5(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x - 3)(x - 2)}{\sqrt{2x + 5} + 3} + \frac{(x - 2)(2x - 3)}{\sqrt{x - 1} + 1} + 5(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2) \left[\frac{2x - 6}{\sqrt{2x + 5} + 3} + \frac{2x - 3}{\sqrt{x - 1} + 1} + 5 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2) \left[\frac{2x - 6}{\sqrt{2x + 5} + 3} + 2 + \frac{2x - 3}{\sqrt{x - 1} + 1} + 3 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2) \left(\frac{2x - 6 + 6 + 2\sqrt{2x + 5}}{\sqrt{2x + 5} + 3} + \frac{2x - 3 + 3 + 3\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x - 1} + 1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2) \left(\frac{2x + 2\sqrt{2x + 5}}{\sqrt{2x + 5} + 3} + \frac{2x + 3\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x - 1} + 2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \left(\text{do } \frac{2x + 2\sqrt{2x + 5}}{\sqrt{2x + 5} + 3} + \frac{2x + 3\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x - 1} + 2} > 0 \forall x \geq 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow y = 2x + 1 = 2.2 + 1 = 5$$

Thay $x = 2; y = 5$ vào hệ điều kiện (*) ta thấy thỏa mãn.

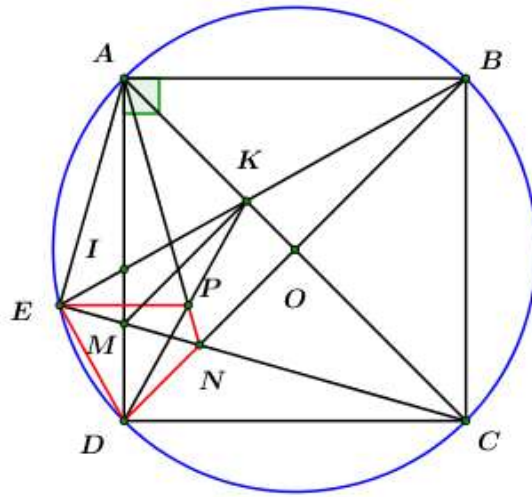
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 5)$.

Câu 3:

Phương pháp:

1. Sử dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh tứ giác nội tiếp.
2. Dựa vào các tứ giác nội tiếp, chứng minh các góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.
3. Chứng minh các tam giác đồng dạng, từ đó chứng minh các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ và tính độ dài đoạn thẳng AE theo R .

Cách giải:



1. Chứng minh: Tứ giác EPND nội tiếp một đường tròn.

Ta có: $\angle PNE = \angle ANE = \angle NAC + \angle NCA$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

Mà $N \in BD$ là đường trung trực của $AC \Rightarrow NA = NC \Rightarrow \triangle NAC$ cân tại $N \Rightarrow \angle NAC = \angle NCA$

$\Rightarrow \angle PNE = 2\angle NCA = \text{độ đo cung } AE$ (vì $\angle ACE$ là góc nội tiếp chắn cung AE) (1)

Ta có: $\triangle DAK = \triangle BAK$ ($c - g - c$) $\Rightarrow \angle ABK = \angle ADK$ (hai góc tương ứng)

Hay $\angle ABE = \angle PDA$.

Mà $\angle ABE$ cũng là góc nội tiếp chắn cung $AE \Rightarrow \angle ADP = \angle ABE = \frac{1}{2} \text{ độ đo cung } AE$.

Lại có: $\angle EDA = \frac{1}{2} \text{ độ đo cung } AE$ (góc nội tiếp chắn cung AE)

$$\Rightarrow \angle EDM = \angle ADE + \angle ADP = sd \text{ cung } AE. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\angle EDP = \angle ENP (= sd \text{ cung } AE)$.

$\Rightarrow EDNP$ là tứ giác nội tiếp. (tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau). (đpcm)

2. Chứng minh: $\angle EKM = \angle DKM$.

Xét tứ giác $AEMK$ ta có: $\angle KAM = \angle KEM = 45^\circ$ cùng nhìn đoạn KM

$\Rightarrow AEMK$ là tứ giác nội tiếp. (tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

$\Rightarrow \angle MEA = \angle MKA$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AM) và $\angle EAD = \angle EKM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EM) (3)

Mà $\angle EAM = \angle AEC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$$\Rightarrow \angle MEA = \angle MKA = 90^\circ \Rightarrow MK \perp AC$$

Mà $DB \perp AC$ (do $ABCD$ là hình vuông)

$$\Rightarrow BD \parallel MK (\perp AC)$$

$$\Rightarrow \angle MKD = \angle KDB \text{ (so le trong).}$$

Mà $K \in AC$ là đường trung trực của đoạn thẳng $BD \Rightarrow KB = KD \Rightarrow \triangle KBD$ là tam giác cân tại K .

$$\Rightarrow \angle KBD = \angle KDB = \angle MKD. \quad (4)$$

Lại có: $\angle EAD = \angle KBD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung ED) (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra: $\angle EKM = \angle MKD (= \angle EAM = \angle KBD)$ (đpcm)

3. Khi M là trung điểm của AD , tính độ dài đoạn thẳng AE theo R .

Vì M là trung điểm của $AD \Rightarrow AM = MD = \frac{1}{2}AD$.

Xét $\triangle MDC$ và $\triangle MEA$ ta có:

$$\angle EMA = \angle DMC \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\angle AEM = \angle MDC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle MDC \sim \triangle MEA (g - g)$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{EA} = \frac{MD}{ME} = \frac{MC}{MA} \Leftrightarrow MD \cdot MA = ME \cdot MC = MD^2 = \frac{CD^2}{4}$$

Áp dụng định lý Pitago cho $\triangle MCD$ vuông tại D ta có:

$$MC^2 = CD^2 + MD^2 = CD^2 + \frac{CD^2}{4} = \frac{5}{4}CD^2.$$

$$\Rightarrow MC = \frac{\sqrt{5}}{2}CD \Rightarrow ME = \frac{CD^2}{4MC} = \frac{CD^2}{4 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}CD} = \frac{CD}{2\sqrt{5}}.$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{EA} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow EA = \frac{CD \cdot MA}{MC} = \frac{CD \cdot \frac{CD}{2}}{\frac{\sqrt{5}CD}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}CD.$$

$$R = OC = \frac{CD\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CD = R\sqrt{2} \Rightarrow EA = \frac{\sqrt{5}}{5}CD = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot R\sqrt{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}R.$$

Câu 4:

Phương pháp:

Đặt điều kiện để phương trình đã cho có nghĩa.

Biến đổi phương trình và sử dụng điều kiện $x, y \in \mathbb{Z}$ để giải phương trình.

Cách giải:

Tìm các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2020}$.

Điều kiện: $x \geq 0; y \geq 0$.

Theo đề bài ta có: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2020}$ (*)

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2020} - \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 2020 - 2\sqrt{2020y} + y$$

$$\Leftrightarrow x = 2020 + y - 4\sqrt{5 \cdot 101y}$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4\sqrt{5 \cdot 101y} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 5 \cdot 101y$ là số chính phương.

$$\Rightarrow 5 \cdot 101y = k^2 \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y = 5 \cdot 101a^2 = 505a^2 \quad (a \in \mathbb{Z}).$$

Chứng minh tương tự ta có: $x = 5 \cdot 101b^2 = 505b^2 \quad (b \in \mathbb{Z})$.

Thay $x = 505b^2$ và $y = 505a^2$ vào phương trình (*) ta được:

$$\sqrt{505b^2} + \sqrt{505a^2} = \sqrt{2020}$$

$$\Leftrightarrow |b|\sqrt{505} + |a|\sqrt{505} = 2\sqrt{505}$$

$$\Leftrightarrow |a| + |b| = 2.$$

Vì $a, b \in \mathbb{Z}$ nên ta có bảng:

$ a $	$ b $	$x = 505b^2$	$y = 505a^2$
0	2	2020 (tm)	0 (tm)
1	1	505 (tm)	505 (tm)
2	0	0 (tm)	2020 (tm)

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn bài toán là: $\{(2020; 0); (505; 505); (0; 2020)\}$.

Câu 5:

Cách giải:

1. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} 0 < a, b, c < \frac{1}{2} \\ 2a + 3b + 4c = 3 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{a(3b+4c-2)} + \frac{9}{b(4a+8c-3)} + \frac{8}{c(2a+3b-1)}.$$

Theo đề bài ta có: $2a + 3b + 4c = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3b + 4c = 3 - 2a \\ 4a + 8c = 2(3 - 3b) \\ 2a + 3b = 3 - 4c \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= \frac{2}{a(3b+4c-2)} + \frac{9}{b(4a+8c-3)} + \frac{8}{c(2a+3b-1)} \\ &= \frac{2}{a(3-2a-2)} + \frac{9}{b(6-6b-3)} + \frac{8}{c(3-4c-1)} \\ &= \frac{2}{a(1-2a)} + \frac{3}{b(1-2b)} + \frac{4}{c(1-2c)} \\ &= \frac{2a}{a^2(1-2a)} + \frac{3b}{b^2(1-2b)} + \frac{4c}{c^2(1-2c)}. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AG-GM: $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ ta có: $a^2(1-2a) \leq \left(\frac{a+a+1-2a}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

Tương tự ta có: $\begin{cases} b^2(1-2b) \leq \frac{1}{27} \\ c^2(1-2c) \leq \frac{1}{27} \end{cases}$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{a^2(1-2a)} \geq 27; \frac{1}{b^2(1-2b)} \geq 27; \frac{1}{c^2(1-2c)} \geq 27 \\ &\Rightarrow \frac{2a}{a^2(1-2a)} + \frac{3b}{b^2(1-2b)} + \frac{4c}{c^2(1-2c)} \geq 27(2a+3b+4c) \\ &\Rightarrow P \geq 27.3 = 81. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ 2a+3b+4c=3 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$$

Vậy $\min P = 81$ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm $M(a; b)$ được gọi là điểm nguyên nếu cả a và b đều là số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại điểm I trong mặt phẳng tọa độ và 2019 số thực dương $R_1; R_2; \dots; R_{2019}$ sao cho có đúng k điểm nguyên nằm trong đường tròn $(I; R_k)$ với mọi k là số nguyên dương không vượt quá 2019.

Xét điểm $I(\sqrt{2}; \sqrt{3})$. Ta chứng minh khoảng cách từ I đến hai điểm nguyên khác nhau là khác nhau.

Xét hai điểm nguyên $M(a; b), M'(a'; b')$ ta có:

$$\begin{aligned} IM &= IM' \Leftrightarrow IM^2 = IM'^2 \\ &\Leftrightarrow (a - \sqrt{2})^2 + (b - \sqrt{3})^2 = (a' - \sqrt{2})^2 + (b' - \sqrt{3})^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 - 2\sqrt{2}a + 2 + b^2 - 2\sqrt{3}b + 3 = a'^2 - 2\sqrt{2}a' + 2 + b'^2 - 2\sqrt{3}b' + 3 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 - a'^2 - b'^2 + 2\sqrt{2}(a' - a) + 2\sqrt{3}(b' - b) = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Giả sử các số nguyên $m; n; p$ thỏa mãn: $m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0$ thì: $m = n = p = 0$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}; m, n, p \in \mathbb{Q} \\ 2\sqrt{2}mn = 3p^2 - m^2 - 2n^2 \\ 2\sqrt{3}mp = 2n^2 - m^2 - 3p^2 \\ 2\sqrt{5}pn = m^2 - 2n^2 - 3p^2 \\ m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mn = np = pm = 0 \\ m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - a'^2 - b'^2 = 0 \\ 2(a' - a) = 0 \\ 2(b' - b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \Rightarrow M \equiv M'.$$

Như vậy khoảng cách từ $I(\sqrt{2}; \sqrt{3})$ đến hai điểm nguyên khác nhau là khác nhau.

Xét tất cả các khoảng cách từ các điểm nguyên đến I , các khoảng cách này đôi một phân biệt. Gọi S là tập hợp các số thực bằng các khoảng cách từ tất cả các điểm nguyên đến I .

Ta có thể chọn được 2020 số dương nhỏ nhất thuộc S và được sắp xếp theo thứ tự tăng dần, nghĩa là tồn tại các số dương $s_1; s_2; \dots; s_{2020}$ thuộc tập S thỏa mãn $s_p < s_q$ nếu $p < q$, các số thuộc $S \setminus \{s_1; s_2; \dots; s_{2020}\}$ đều lớn hơn $s_1; s_2; \dots; s_{2020}$.

Đặt $R_k = \frac{s_k + s_{k+1}}{2}$, $k = 1; 2; 3; \dots; 2019$.

Như vậy tồn tại điểm I trong mặt phẳng tọa độ và 2019 số thực dương $R_1; R_2; \dots; R_{2019}$ sao cho có đúng k điểm nguyên nằm trong đường tròn $(I; R_k)$ với mọi k là số nguyên dương không vượt quá 2019.