

BÀI GIẢNG: NGUYÊN LÝ DIRICLE VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN
CHUYÊN ĐỀ: NGUYÊN LÝ DIRICHLE
MÔN TOÁN LỚP 6

CÔ GIÁO: NGUYỄN THỊ YẾN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Nguyên lý Dirichlet do nhà toán học người Đức nổi tiếng là Dirichlet đề xuất từ thế kỷ XX đã được áp dụng để chứng minh sự tồn tại nghiệm trong nhiều bài toán tổ hợp. Nguyên lý này được phát triển từ một mệnh đề rất đơn giản gọi là “nguyên lý quả cam” hay là nguyên lý “chuồng chim bồ câu”: Giả sử có một đàn chim bồ câu bay vào chuồng. Nếu số chim nhiều hơn số ngăn chuồng thì chắc chắn có ít nhất một ngăn có nhiều hơn một con chim.

- Một cách tổng quát, nguyên lý Dirichlet được phát biểu như sau:

Nếu xếp nhiều hơn $n+1$ đối tượng vào n cái hộp thì ít nhất một hộp chứa không ít hơn hai đối tượng.

- Việc chứng minh nguyên lý này có thể tiến hành bằng lập luận phản chứng rất đơn giản: Giả sử không hộp nào chứa nhiều hơn một đối tượng thì chỉ có nhiều nhất là n đối tượng được xếp trong các hộp, trái với giả thiết là số đối tượng lớn hơn n .

Ví dụ 1:

Một năm có nhiều nhất 365 ngày. Do vậy trong số 366 người bất kỳ bao giờ cũng có ít nhất 2 người có cùng ngày sinh nhật (không xét năm nhuận).

Ví dụ 2:

Thang điểm bài kiểm tra là từ 0 đến 10, tức là có 11 thang điểm khác nhau. Do vậy trong số 12 học sinh bất kỳ của 1 lớp sẽ có ít nhất 2 người có kết quả bài kiểm tra giống nhau.

Nguyên lý Dirichlet cơ bản:

Nếu nhốt n thỏ vào m chuồng, với $n > m$, nghĩa là số thỏ nhiều hơn số chuồng, thì ít nhất cũng có một chuồng nhốt không ít hơn hai thỏ.

Nguyên lý Dirichlet tổng quát:

Nếu đặt n viên bi vào k cái hộp (n, k nguyên dương), thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ viên bi, với $[x]$

là số nguyên bé nhất không nhỏ hơn x .

Để sử dụng nguyên lý Dirichlet ta phải làm xuất hiện tình huống nhốt “thỏ” vào “chuồng” và thỏa mãn các điều kiện:

+ Số “thỏ” phải nhiều hơn số “chuồng”

+ “Thỏ” phải được nhốt hết vào các “chuồng”, nhưng không bắt buộc “chuồng” nào cũng phải có “thỏ”.

B. BÀI TẬP

Bài 1: Một trường học có 1000 học sinh gồm 23 lớp. Chứng minh rằng ít nhất có một lớp có từ 44 học sinh trở lên.

Giải

Giả sử 23 lớp có không quá 43 học sinh

\Rightarrow Số học sinh sẽ không quá $23 \cdot 43 = 989$ (học sinh)

(trái với giả thiết – trường có 100 học sinh)

Theo nguyên lý Dirichle, phải có ít nhất có một lớp có từ 44 học sinh trở lên.

Bài 2: Một lớp có 50 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 5 học sinh có tháng sinh giống nhau.

Giải

Giả sử có không quá 4 học sinh có tháng sinh giống nhau

Vì 1 năm có 12 tháng \Rightarrow Số học sinh không quá: $4 \cdot 12 = 48$ (học sinh)

(trái với giả thiết – lớp có 50 học sinh)

Theo nguyên lý Dirichle, có ít nhất 5 học sinh có tháng sinh giống nhau.

Bài 3: Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra, không có ai bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên).

Giải

Có $45 - 2 = 43$ học sinh đạt từ 2 đến 9 điểm

(8 loại điểm từ 2 đến 9 điểm)

Giả sử có không quá 5 học sinh có điểm giống nhau

\Rightarrow Có không quá: $5 \cdot 8 = 40$ (học sinh)

(trái với giả thiết – có 43 học sinh đạt từ 2 đến 9 điểm)

Theo nguyên lý Dirichle, có ít nhất 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

Bài 4: Một lớp học có 50 học sinh, có duy nhất 1 học sinh thiếu nhiều bài tập nhất là thiếu 3 bài tập. Chứng minh rằng tồn tại 17 học sinh thiếu 1 số bài tập như nhau (trường hợp không thiếu bài tập coi như thiếu 0 bài).

Giải

Giả sử có không quá 16 học sinh thiếu 1 số bài tập như nhau

\Rightarrow Có không quá $16 \cdot 3 = 48$ (học sinh)

(trái với giả thiết – lớp học có 50 học sinh)

Theo nguyên lý Dirichle, tồn tại 17 học sinh thiếu 1 số bài tập như nhau.

Bài 5: Có năm loại học bổng khác nhau. Hỏi rằng phải có ít nhất bao nhiêu học sinh để chắc chắn rằng có ít ra là 6 người cùng nhận một học bổng.

Giải

Gọi N là số học sinh

Theo nguyên lý Dirichle, ta có: $\left\lceil \frac{N}{5} \right\rceil = 6 \Rightarrow 5 < \frac{N}{5} \leq 6 \Rightarrow 25 < N \leq 30$

$\Rightarrow N$ nhỏ nhất là 26

Vậy có ít nhất 26 học sinh thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.