BÀI GIẢNG: NHỊ THỨC NEWTON
CHUYÊN ĐỀ: ĐẠI SỐ TỔ HỢP
MÔN: TOÁN 10 (CƠ BẢN & NÂNG CAO)
GIÁO VIÊN: NGÔ VĂN TOẢN

MỤC TIÊU

- ✓ *Công thức khai triển nhị thức Newton.*
- ✓ *Tìm hiểu các dạng toán thường gặp về nhị thức Newotn.*

I. CÔNG THỨC KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON

Có thể bạn đã biết:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Công thức:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$

Trường hợp có số mũ nhỏ:

$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 ab^3 + C_4^4 b^4$

$(a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 ab^4 + C_5^5 b^5$

Ví dụ 1: Thực hiện khai triển:

a) $(1+x)^5$ b) $(2x-1)^4$ c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$

Cách giải:

a) $(1+x)^5 = C_5^0 + C_5^1 x + C_5^2 x^2 + C_5^3 x^3 + C_5^4 x^4 + C_5^5 x^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 5x^4 + x^5$

b) $(2x-1)^4 = C_4^0 (2x)^4 + C_4^1 (2x)^3 (-1) + C_4^2 (2x)^2 (-1)^2 + C_4^3 (2x)(-1)^3 + C_4^4 (-1)^4$

$= 2^4.x^4 + 4.2^3.x^3.(-1) + 6.2^2.x^2.1 + 4.2x.(-1) + 1$

$= 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$

c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6 = C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5.\frac{1}{x} + C_6^2 x^4.\left(\frac{1}{x}\right)^2 + C_6^3 x^3.\left(\frac{1}{x}\right)^3 + C_6^4 x^2.\left(\frac{1}{x}\right)^4 + C_6^5 x.\left(\frac{1}{x}\right)^5 + C_6^6 \left(\frac{1}{x}\right)^6$

$$= x^6 + 6x^4 + 15x^4.\frac{1}{x^2} + 20x^3.\frac{1}{x^3} + 15x^2.\frac{1}{x^4} + 6x.\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}$$

$$= x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$$

Nhận xét:

+ Gồm có $n+1$ số hạng, $(a-b)^n$ các số hạng đan dấu

+ Số mũ của a giảm từ n đến 0 và số mũ của b tăng từ 0 đến n

+ Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n

+ Các hệ số có tính đối xứng: $C_n^k = C_n^{n-k}$ (các hệ số nhị thức cách đều hai số hạng đầu và cuối bằng nhau)

+ Số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

+ Nếu n chẵn, số hạng đứng giữa số hạng tương ứng với $k = \frac{n}{2}$

+ Nếu n lẻ, hai số hạng đứng giữa số hạng tương ứng với $k = \frac{n-1}{2}$, $k = \frac{n+1}{2}$

ĐỀ BÀI

Dạng 1: Công thức khai triển nhị thức Newton

Câu 1: Trong khai triển nhị thức $(a+2)^{n+6}$, $n \in \mathbb{N}$ có tất cả 17 số hạng. Vậy n bằng?

A. 17. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 2: Tìm $n \in \mathbb{N}$ biết khai triển nhị thức $(a+2)^{n+4}$, $a \neq -2$ có tất cả 15 số hạng?

A. 13. **B.** 10. **C.** 17. **D.** 11.

Câu 3: Ba số hạng đầu tiên theo lũy thừa tăng dần của x trong khai triển của $(1+2x)^{10}$ là?

A. $1, 45x, 120x^2$. **B.** $1, 4x, 4x^2$. **C.** $1, 20x, 180x^2$. **D.** $10, 45x, 120x^2$.

Câu 4: Cho khai triển theo lũy thừa giảm dần của a trong nhị thức $(2a-1)^6$. Ba số hạng đầu của khai triển là?

A. $2a^6, -6a^5, 15a^4$. **B.** $2a^6, -12a^5, 20a^4$. **C.** $64a^6, -192a^5, 480a^4$. **D.** $64a^6, -192a^5, 240a^4$.

Câu 5: Khai triển nhị thức $(2x+y)^5$ ta được kết quả là?

A. $32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$.

B. $32x^5 + 16x^4y + 8x^3y^2 + 4x^2y^3 + 2xy^4 + y^5$.

C. $2x^5 + 10x^4y + 20x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$ 10.

D. $32x^5 + 800x^4y + 800x^3y^2 + 400x^2y^3 + 100xy^4 + y^5$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Trong khai triển nhị thức $(a+2)^{n+6}$, $n\in\mathbb{N}$ có tất cả 17 số hạng. Vậy n bằng?

A. 17. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

Cách giải:

Trong khai triển nhị thức $(a+2)^{n+6}$, $n\in\mathbb{N}$ có tất cả $n+6+1=n+7$ số hạng

$\Rightarrow n+7=17\Leftrightarrow n=10$.

Chọn C.

Câu 2: Tìm $n\in\mathbb{N}$ biết khai triển nhị thức $(a+2)^{n+4}$, $a\neq -2$ có tất cả 15 số hạng?

A. 13. **B.** 10. **C.** 17. **D.** 11.

Cách giải:

Khai triển nhị thức $(a+2)^{n+4}$, $a\neq -2$ có tất cả 15 số hạng

$\Rightarrow n+4+1=15\Leftrightarrow n=10$.

Chọn B.

Câu 3: Ba số hạng đầu tiên theo lũy thừa tăng dần của x trong khai triển của $(1+2x)^{10}$ là?

A. $1, 45x, 120x^2$. **B.** $1, 4x, 4x^2$. **C.** $1, 20x, 180x^2$. **D.** $10, 45x, 120x^2$.

Cách giải:

Ta có: $(1+2x)^{10}=1+20x+180x^2+...$

Ba số hạng đầu tiên là $1, 20x, 180x^2$.

Chọn C.

Câu 4: Cho khai triển theo lũy thừa giảm dần của a trong nhị thức $(2a-1)^6$. Ba số hạng đầu của khai triển là?

A. $2a^6, -6a^5, 15a^4$. **B.** $2a^6, -12a^5, 20a^4$. **C.** $64a^6, -192a^5, 480a^4$. **D.** $64a^6, -192a^5, 240a^4$.

Cách giải:

Ta có: $(2a-1)^6=64a^6-192a^5+240a^4-...$

Ba số hạng đầu là $64a^6, -192a^5, 240a^4$.

Chọn D.

Câu 5: Khai triển nhị thức $(2x+y)^5$ ta được kết quả là?

A. $32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$.

B. $32x^5+16x^4y+8x^3y^2+4x^2y^3+2xy^4+y^5$.

C. $2x^5+10x^4y+20x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5\,10$.

D. $32x^5+800x^4y+800x^3y^2+400x^2y^3+100xy^4+y^5$.

Cách giải:

Ta có: $(2x+y)^5=32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$

Chọn A.

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1 Tìm số hạng chứa x^a

Cần nhớ:

+ Công thức số hạng tổng quát: $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$

+ Một số công thức lũy thừa: $x^n.x^m=x^{m+n}$; $\dfrac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$; $(x.y)^n=x^n.y^n$; $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n=\dfrac{x^n}{y^n}$

Ví dụ 1: Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $\left(x+\dfrac{2}{x^2}\right)^6$?

Cách giải:

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(x+\dfrac{2}{x^2}\right)^6$ là:

$$T_{k+1}=C_6^k x^{6-k}\left(\frac{2}{x^2}\right)^k=C_6^k x^{6-k}.\frac{2^k}{x^{2k}}=C_6^k.2^k.x^{6-3k}$$

Số hạng chứa x^3 tương ứng với $6-3k=3\Leftrightarrow k=1$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển trên là: $C_6^1.2=12$.

Ví dụ 2: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển:

a) $\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)^8$ b) $\left(xy^2-\dfrac{1}{xy}\right)^8$

Cách giải:

a) $\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)^8$

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)^8$ là

$$T_{k+1}=C_8^k\left(x^3\right)^{8-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_8^k x^{24-3k}.\frac{1}{x^k}=C_8^k.x^{24-4k}$$

Số hạng không chứa x ứng với $24-4k=0\Leftrightarrow k=6$

Vậy hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển trên là: $C_8^6 = 28$.

b) $\left(xy^2 - \frac{1}{xy}\right)^8$

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(xy^2 - \frac{1}{xy}\right)^8$ là

$$T_{k+1} = C_8^k \left(xy^2\right)^{8-k} \left(-\frac{1}{xy}\right)^k = C_8^k .(-1)^k .x^{8-2k} .y^{16-3k}$$

Số hạng không chứa x ứng với $8-2k=0 \Leftrightarrow k=4$

Vậy hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển trên là: $C_8^4 .(-1)^4 .y^{16-3.4} = 70y^4$.

Ví dụ 3: Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{3n+1}$ với $n \neq 0$, biết n nguyên dương thỏa mãn $3C_{n+1}^2 + nP_2 = 4A_n^2$?

Cách giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$

Ta có: $3C_{n+1}^2 + nP_2 = 4A_n^2 \Leftrightarrow 3.\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 2n = 4.\frac{n!}{(n-2)!}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(n+1)n + 2n = 4n(n-1) \Leftrightarrow 3(n+1) + 4 = 8(n-1)$

$\Leftrightarrow 3n+3+4 = 8n-8 \Leftrightarrow 5n = 15 \Leftrightarrow n = 3$

$\Rightarrow 3n+1 = 10$

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{10}$ là:

$$T_{k+1} = C_{10}^k \left(x^3\right)^{10-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_{10}^k x^{30-3k} .\frac{1}{x^k} = C_{10}^k .x^{30-4k}$$

Số hạng chứa x^6 tương ứng với $30-4k=6 \Leftrightarrow k=6$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển trên là: $C_{10}^6 = 210$.

2 Tính tổng, chứng minh các đẳng thức chứa C_n^k

Phương pháp: Dựa vào khai triển nhị thức $(a \pm b)^n$

+ Ta xác định n

+ Chọn giá trị a, b cho phù hợp

Ví dụ 1: Chứng minh: $3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 - ..... - 3C_{16}^{15} + C_{16}^{16} = 2^{16}$?

Cách giải:

Suy luận:

+ Vì tổ hợp dạng: $C_{16}^0, C_{16}^1, C_{16}^2,...C_{16}^{16}$ nên chọn $n=16$

+ Số mũ của số 3 giảm dần $\Rightarrow$ Chọn $a=3$

+ Không có sẵn số mũ của số nào tăng $\Rightarrow$ Chọn $b=1$ (vì $1^0=1^1=1^2=...=1^{16}=1$)

+ Dấu đan nhau (cộng rồi trừ, cộng trừ,…) nên chọn khai triển $(a-b)^{16}=(3-1)^{16}$

Lời giải tham khảo:

$(3-1)^{16}=3^{16}C_{16}^0-3^{15}C_{16}^1+3^{14}C_{16}^2-.....-3C_{16}^{15}+C_{16}^{16}$

$\Leftrightarrow 2^{16}=3^{16}C_{16}^0-3^{15}C_{16}^1+3^{14}C_{16}^2-.....-3C_{16}^{15}+C_{16}^{16}$ (đpcm).

Ví dụ 2: Chứng minh:

a) Chứng minh: $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$

b) Cho tập A có n phần tử $(n\geq 1)$. Tìm số tập con của tập A?

Cách giải:

a) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$

Xét $(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^{n-1}+C_n^n$

$\Leftrightarrow 2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^{n-1}+C_n^n$ (đpcm)

b) Cho tập A có n phần tử $(n\geq 1)$. Tìm số tập con của tập A?

Ta có: $n(A)=n$. Các tập con của A có các loại sau:

+ Loại 1: Tập con không có phần tử nào $\Rightarrow$ 1 tập con $(\varnothing)$

+ Loại 2: Tập con có 1 phần tử $\Rightarrow$ Có C_n^1 tập con

+ Loại 3: Tập con có 2 phần tử $\Rightarrow$ Có C_n^2 tập con

…

+ Loại $n+1$: Tập con có n phần tử $\Rightarrow$ Có C_n^n tập con

$\Rightarrow$ Số tập con của tập A là: $1+C_n^1+C_n^2+...+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$.

Ví dụ 3: Tính tổng:

a) $S=C_{100}^0+C_{100}^2+C_{100}^4+...+C_{100}^{100}$

b) $S=C_{2001}^0+3^2C_{2001}^2+3^4C_{2001}^4+...+3^{2000}C_{2001}^{2000}$?

Cách giải:

a) $S=C_{100}^0+C_{100}^2+C_{100}^4+...+C_{100}^{100}$

Xét $(1+1)^{100}+(1-1)^{100}=C_{100}^0+C_{100}^1+C_{100}^2+...+C_{100}^{100}+C_{100}^0-C_{100}^1+C_{100}^2-...+C_{100}^{100}$

$\Leftrightarrow 2^{100}+0=2C_{100}^{100}+2C_{100}^{2}+...+2C_{100}^{100}$

$\Leftrightarrow 2^{100}=2\left(C_{100}^{0}+C_{100}^{2}+...+C_{100}^{100}\right)$

$\Leftrightarrow 2S=2^{100}\Leftrightarrow S=\dfrac{2^{100}}{2}=2^{99}$

Ví dụ thêm: Tính tổng: $S=C_{100}^{1}+C_{100}^{3}+C_{100}^{5}+...+C_{100}^{99}$

Xét $(1+1)^{100}-(1-1)^{100}=C_{100}^{0}+C_{100}^{1}+C_{100}^{2}+...+C_{100}^{99}+C_{100}^{100}-\left(C_{100}^{0}-C_{100}^{1}+C_{100}^{2}-...-C_{100}^{99}+C_{100}^{100}\right)$

$\Leftrightarrow 2^{100}-0=2C_{100}^{1}+2C_{100}^{3}+...+2C_{100}^{99}$

$\Leftrightarrow 2^{100}=2\left(C_{100}^{1}+C_{100}^{3}+...+C_{100}^{99}\right)$

$\Leftrightarrow 2S=2^{100}\Leftrightarrow S=\dfrac{2^{100}}{2}=2^{99}$

Suy ra $C_{100}^{0}+C_{100}^{2}+C_{100}^{4}+...+C_{100}^{100}=C_{100}^{1}+C_{100}^{3}+C_{100}^{5}+...+C_{100}^{99}$

Từ đó ta có tính chất:

$$C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}+...+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^{1}+C_{2n}^{3}+...+C_{2n}^{2n-1}=2^{2n-1}$$

b) $S=C_{2001}^{0}+3^{2}C_{2001}^{2}+3^{4}C_{2001}^{4}+...+3^{2000}C_{2001}^{2000}$?

Xét

$(1+3)^{2001}+(1-3)^{2001}$

$=\left(C_{2001}^{0}+C_{2001}^{1}.3+C_{2001}^{2}.3^{2}+...+C_{2001}^{2000}.3^{2000}+C_{2001}^{2001}.3^{2001}\right)+\left(C_{2001}^{0}-C_{2001}^{1}.3+C_{2001}^{2}.3^{2}-...+C_{2001}^{2000}.3^{2000}-C_{2001}^{2001}.3^{2001}\right)$

$\Rightarrow 4^{2001}+(-2)^{2001}=2\left(C_{2001}^{0}+C_{2001}^{2}.3^{2}+...+C_{2001}^{2000}.3^{2000}\right)$

$\Rightarrow 4^{2001}-2^{2001}=2S\Leftrightarrow S=\dfrac{4^{2001}-2^{2001}}{2}=2.4^{2000}-2^{2000}$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng:

a) $C_{n}^{0}.C_{n}^{n}+C_{n}^{1}.C_{n}^{n-1}+C_{n}^{2}.C_{n}^{n-2}+...+C_{n}^{n}.C_{n}^{0}=C_{2n}^{n}$

b) $\left(C_{n}^{0}\right)^{2}+\left(C_{n}^{1}\right)^{2}+...+\left(C_{n}^{n}\right)^{2}=C_{2n}^{n}$?

Cách giải:

a) $C_{n}^{0}.C_{n}^{n}+C_{n}^{1}.C_{n}^{n-1}+C_{n}^{2}.C_{n}^{n-2}+...+C_{n}^{n}.C_{n}^{0}=C_{2n}^{n}$

Cách 1:

Xét $(1+x)^{n}.(1+x)^{n}=(1+x)^{2n}\ (*)$

+ $VP(*)=(1+x)^{2n}$

Số hạng tổng quát: $C_{2n}^{k}.1^{2n-k}.x^{k}=C_{2n}^{k}.x^{k}$

$\Rightarrow$ Số hạng chứa x^{n} trong khai triển $(1+x)^{2n}$ là: $C_{2n}^{n}x^{n}\ (1)$

+ $VT(*)=(1+x)^n.(1+x)^n=\left(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n\right)+\left(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n\right)$

Số hạng chứa x^n trong khai triển của $VT(*)$ là:

$C_n^0.C_n^nx^n+C_n^1x.C_n^{n-1}x^{n-1}+...+C_n^nx^n.C_n^0=\left[C_n^0.C_n^n+C_n^1.C_n^{n-1}+...+C_n^n.C_n^0\right].x^n\ \ (2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow C_{2n}^n=C_n^0.C_n^n+C_n^1.C_n^{n-1}+C_n^2.C_n^{n-2}+...+C_n^n.C_n^0$ (đpcm).

Cách 2:

Xét bài toán phụ: Lớp 10A có n bạn nam và n bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn n bạn đi tập văn nghệ.

+ Cách 1: Tổng số học sinh là $2n$ bạn

Chọn n bạn trong $2n$ bạn có C_{2n}^n (cách)

+ Cách 2:

Chọn n bạn ta có phương án sau:

Phương án 1: Chọn 0 bạn nam và n bạn nữ có $C_n^0.C_n^n$ (cách)

Phương án 2: Chọn 1 bạn nam và $n-1$ bạn nữ có $C_n^1.C_n^{n-1}$ (cách)

…

Phương án $n+1$: Chọn n bạn nam và 0 bạn nữ có $C_n^n.C_n^n$ (cách)

Vậy có $C_n^0.C_n^n+C_n^1.C_n^{n-1}+C_n^2.C_n^{n-2}+...+C_n^n.C_n^0$ cách chọn n bạn.

Suy ra $C_n^0.C_n^n+C_n^1.C_n^{n-1}+C_n^2.C_n^{n-2}+...+C_n^n.C_n^0=C_{2n}^n$ (đpcm).