BÀI GIẢNG: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI VÀ GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

CHUYÊN ĐỀ: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

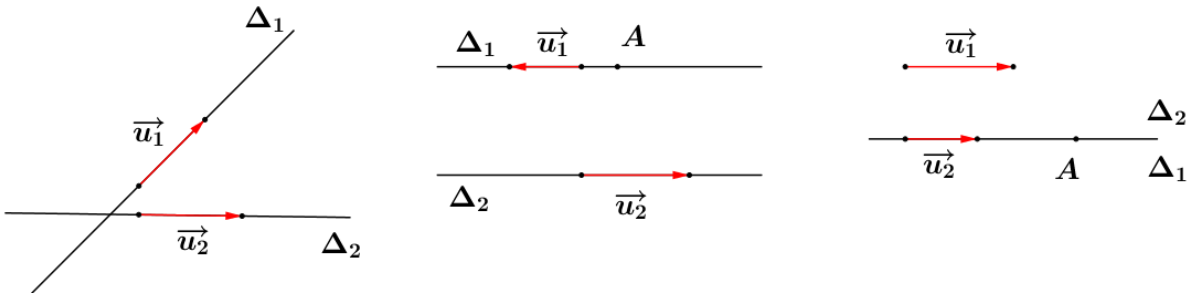
MÔN: TOÁN 10 (CÁNH DIỀU)

GIÁO VIÊN: NGÔ VĂN TOẢN

MỤC TIÊU

- ✓ *Vị trí tương đối của hai đường thẳng.*
- ✓ *Góc giữa hai đường thẳng.*
- ✓ *Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng.*

I. Vị trí tương đối của hai đường thẳng



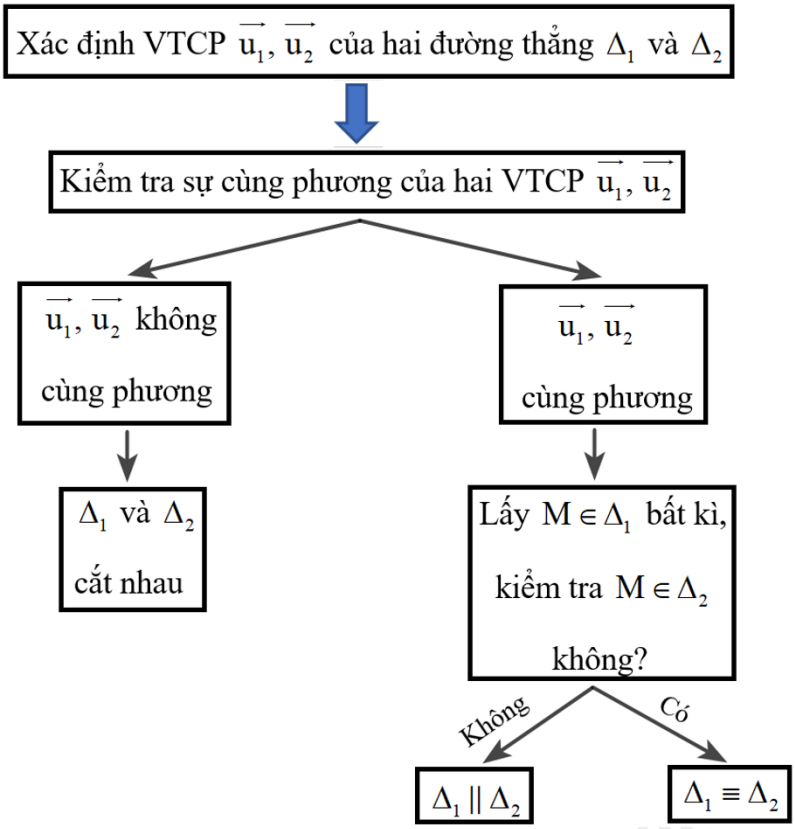
Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có vectơ chỉ phương $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$. Khi đó:

- Δ_1 cắt Δ_2 khi và chỉ khi $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ không cùng phương.

- Δ_1 song song Δ_2 chỉ khi $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ cùng phương và có một điểm thuộc đường thẳng này mà không thuộc đường thẳng còn lại.

- Δ_1 trùng Δ_2 chỉ khi $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ cùng phương và có một điểm thuộc cả hai đường thẳng đó.

Các bước xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.



Nhận xét:

1) Δ_1 vuông góc với Δ_2 khi và chỉ khi $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ vuông góc với nhau.

2) Trong cách làm trên, ta có thể thay thế hai VTCP của hai đường thẳng thành hai VTPT của hai đường thẳng.

Ví dụ 1: Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau:

a) $d_1: 3x+2y-5=0$ và $d_2: x-4y+1=0$.

b) $d_3: x-2y+3=0$ và $d_4: \begin{cases} x=5+4t \\ y=2t \end{cases}$.

c) $d_5: 4x+2y-3=0$ và $d_6: \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}+t \\ y=\dfrac{5}{2}-2t \end{cases}$.

Cách giải:

a) $d_1: 3x+2y-5=0$ và $d_2: x-4y+1=0$.

d_1 có VTPT $\overrightarrow{n_1}=(3;2)$.

d_2 có VTPT $\overrightarrow{n_2}=(1;-4)$.

Do $\dfrac{3}{1} \neq \dfrac{2}{-4}$ nên $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ không cùng phương, suy ra d_1 cắt d_2.

b) $d_3: x-2y+3=0$ và $d_4: \begin{cases} x=5+4t \\ y=2t \end{cases}$.

d_3 có VTPT $\overrightarrow{n_3}=(1;-2)$.

d_4 có VTCP $\overrightarrow{u_4}=(4;2)$ => VTPT $\overrightarrow{n_4}=(-2;4)$.

Do $\frac{1}{-2}=\frac{-2}{4}$ suy ra $\overrightarrow{n_3}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{n_4}$, tức là $\overrightarrow{n_3}$, $\overrightarrow{n_4}$ cùng phương.

+ Cách 1: Lấy $M(5;0) \in d_4$. Kiểm tra $M \in d_3$?

Thay x = 5, y = 0 vào phương trình d_3: 5 – 2.0 + 3 = 0 (vô lí) $\Rightarrow M \notin d_3$.

+ Cách 2: Cho y = 0 => x + 3 = 0 => x = -3 => $N(-3;0) \in d_3$.

Thay x = -3, y = 0 vào phương trình d_4: $\begin{cases} -3=5+4t \\ 0=2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t=0 \end{cases}$ (Vô lí) $\Rightarrow N \notin d_4$.

Vậy d_3 // d_4.

c) $d_5: 4x+2y-3=0$ và $d_6: \begin{cases} x=-\frac{1}{2}+t \\ y=\frac{5}{2}-2t \end{cases}$.

d_5 có VTCP $\overrightarrow{u_5}=(-2;4)$.

d_6 có VTCP $\overrightarrow{u_6}=(1;-2)$, suy ra $\overrightarrow{u_5}=-2\overrightarrow{u_6}$.

Chọn điểm $N\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right) \in d_6$.

Do $N\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right) \in d_5$ suy ra $d_5 \equiv d_6$.

Xét vị trí tương đối bằng nghiệm của hệ phương trình

Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình lần lượt là

$a_1x+b_1y+c_1=0$ và $a_2x+b_2y+c_2=0$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ (I). Nghiệm của (I) là tọa độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2.

Khi đó:

Δ_1 cắt Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

Δ_1 song song Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

Δ_1 trùng Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

Quay lại Ví dụ 1: Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau:

a) $d_1: 3x+2y-5=0$ và $d_2: x-4y+1=0$.

b) $d_3: x-2y+3=0$ và $d_4: \begin{cases} x=5+4t \\ y=2t \end{cases}$.

c) $d_5: 4x+2y-3=0$ và $d_6: \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}+t \\ y=\dfrac{5}{2}-2t \end{cases}$.

Cách giải:

a) Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x+2y-5=0 \\ x-4y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{7} \\ y=\dfrac{4}{7} \end{cases}$

Hệ trên có một nghiệm duy nhất. Như vậy, d_1 và d_2 cắt nhau.

b) $d_4: \begin{cases} x=5+4t \\ y=2t \end{cases} \Rightarrow d_4: x-2y-5=0$.

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_3 và d_4 là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ x-2y-5=0 \end{cases}$. Hệ vô nghiệm.

Như vậy, d_3 song song d_4.

c) Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_5 và d_6 tương ứng với t thỏa mãn phương trình:

$$4\left(-\frac{1}{2}+t\right)+2\left(\frac{5}{2}-2t\right)-3=0 \Leftrightarrow 0t=0$$

Phương trình này có nghiệm với mọi t.

Như vậy, d_5 và d_6 có vô số điểm chung, tức là d_5 trùng với d_6.

Ví dụ 2: Cho hai đường thẳng $\Delta_1: mx-2y-1=0$ và $\Delta_2: x-2y+3=0$. Với giá trị nào của tham số m thì:

a) $\Delta_1 // \Delta_2$?

b) $\Delta_1 \perp \Delta_2$?

Cách giải:

Ta có $\overrightarrow{u_1}=(2;m)$ và $\overrightarrow{u_2}=(2;1)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của Δ_1 và Δ_2.

a) $\Delta_1 // \Delta_2$ khi $\dfrac{m}{1}=\dfrac{-2}{-2}\neq\dfrac{-1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{m}{1}=\dfrac{-2}{-2} \Leftrightarrow m=1.$

b) $\Delta_1 \perp \Delta_2$ nếu $\overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2}$ tức là $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=0 \Leftrightarrow 2.2+m.1=0 \Leftrightarrow m=-4.$

Nhận xét: Cho hai đường thẳng $d: ax+by+c=0$. Khi đó

+ Nếu d' // d thì phương trình d' có dạng ax + by + m = 0 $(m \neq c)$.

+ Nếu $d' \perp d$ thì phương trình d' có dạng -bx + ay + n = 0.

Ví dụ: Cho đường thẳng $d: 2x+3y+3=0$. Viết phương trình đường thẳng d'

a) d' đi qua A(1;1) và song song với d.

b) d' đi qua A(1;1) và vuông góc với d. Từ đó tìm hình chiếu của A trên d.

Cách giải:

a) d' // d => phương trình d': 2x + 3y + m = 0 $(m \neq 3)$.

$A(1;1) \in d' \Rightarrow 2.1+3.1+m=0 \Leftrightarrow m=-5\ (tm)$.

Vậy d': 2x + 3y – 5 = 0.

b) $d' \perp d \Rightarrow$ phương trình d': -3x + 2y + n = 0.

$A(1;1) \in d' \Rightarrow -3.1+2.1+n=0 \Leftrightarrow n=1$.

Vậy d': -3x + 2y + 1 = 0.

Gọi H là hình chiếu của A trên $d \Rightarrow H = d \cap d'$.

Tọa độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x+3y=-3 \\ -3x+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{13} \\ y=-\dfrac{11}{13} \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{-3}{13};\dfrac{-11}{13}\right)$.

Bài toán tìm hình chiếu, điểm đối xứng của một điểm qua đường thẳng.

+) Tìm hình chiếu H của M trên Δ:

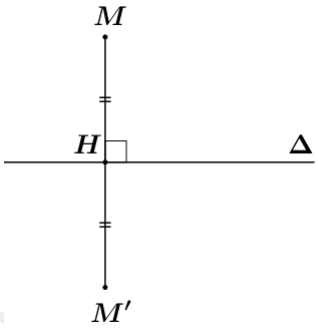
B1: Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và vuông góc với Δ.

B2: Tọa độ H là giao điểm của d và Δ.

+) Tìm điểm đối xứng M' với M qua Δ.

B1: Tìm hình chiếu H của M trên Δ.

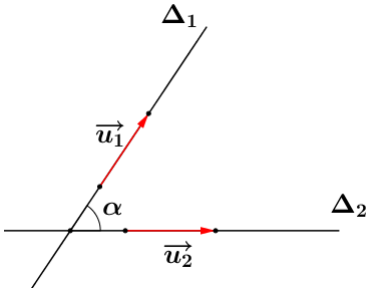
B2: H là trung điểm của MM'. Từ công thức trung điểm suy ra M'.



II. Góc giữa hai đường thẳng

Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vecto chỉ phương lần lượt là $\overrightarrow{u_1}=(a_1;b_1)$, $\overrightarrow{u_2}=(a_2;b_2)$. Khi đó:

$$\cos(\Delta_1;\Delta_2)=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$



Nhận xét: $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$.

Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vecto pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$. Ta cũng có:

$\cos(\Delta_1;\Delta_2)=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right)\right|\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$.

Ví dụ 3: Tìm số đo góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong mỗi trường hợp sau:

a) $\Delta_1:-2x+y+5=0$ và $\Delta_2:3x+y+7=0$.

b) $\Delta_1:\sqrt{3}x-y+7=0$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=-2-t\\y=1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}t\end{cases}$.

Cách giải:

a) Ta có $\overrightarrow{n_1}=(-2;1)$, $\overrightarrow{n_2}=(3;1)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của các đường thẳng Δ_1, Δ_2.

Suy ra $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right)\right|=\dfrac{\left|(-2).3+1.1\right|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}.\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $(\Delta_1;\Delta_2)=45^0$.

b) Ta có $\overrightarrow{n_1}=\left(\sqrt{3};1\right)\Rightarrow\overrightarrow{u_1}=\left(1;\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{u_2}=\left(-1;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của các đường thẳng Δ_1, Δ_2

$$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\frac{\left|1.(-1)+\sqrt{3}.\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right|}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}.\sqrt{(-1)^2+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $(\Delta_1;\Delta_2)=30^0$.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng $d:x+2y-1=0$ và $\Delta:(m-1)x+(m+3)y+m-2=0$. Xác định m để góc giữa d và Δ bằng 45^0.

Cách giải:

Ta có: đường thẳng d có một VTPT là $\overrightarrow{n_d}=(1;2)$; đường thẳng Δ có một VTPT là $\overrightarrow{n_\Delta}=(m-1;m+3)$.

Góc giữa d và Δ bằng 45^0 nên ta có $\cos 45^0=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_d};\overrightarrow{n_\Delta}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_d}.\overrightarrow{n_\Delta}\right|}{\left|\overrightarrow{n_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_\Delta}\right|}$.

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\left|1.(m-1)+2.(m+3)\right|}{\sqrt{5}.\sqrt{(m-1)^2+(m+3)^2}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|3m+5|}{\sqrt{5}.\sqrt{2m^2+4m+10}}$$

$$\Leftrightarrow 10\left(2m^2+4m+10\right)=4(3m+5)^2\Leftrightarrow 16m^2+80m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-5\end{array}\right.$$

Ví dụ 5: Cho đường thẳng (d) có phương trình $x+3y-3=0$. Viết phương trình đường thẳng qua A(-2;0) và tạo với (d) một góc 45^0.

Cách giải:

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, $\vec{n}(A;B)$ là VTPT của Δ $\left(A^2+B^2\neq 0\right)$.

Để Δ lập với (d) một góc 45^0 thì:

$$\cos 45^0=\frac{|A+3B|}{\sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{10}}\Leftrightarrow 2(A+3B)^2=10\left(A^2+B^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2A^2+12AB+18B^2=10A^2+10B^2$$

$$\Leftrightarrow -8A^2+12AB+8B^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=2B\\A=-\frac{1}{2}B\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=2B\\B=-2A\end{array}\right.$$

Cách 1:

TH1: A = 2B (B = 0 => A = 0 => Loại $\Rightarrow B\neq 0$).

$\Rightarrow \overrightarrow{n_\Delta}=(A;B)=(2B;B)=B(2;1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(2;1)$ là VTPT của $\Delta\Rightarrow$ phương trình $\Delta: 2(x+2)+1(y-0)=0\Leftrightarrow 2x+y+4=0.$

TH2: B = -2A (Dễ thấy $A\neq 0$).

$\Rightarrow \overrightarrow{n_\Delta}=(A;B)=(A;-2A)=A(1;-2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(1;-2)$ là VTPT của $\Delta\Rightarrow$ phương trình $\Delta: 1(x+2)-2(y-0)=0\Leftrightarrow x-2y+2=0.$

Cách 2:

TH1: A = 2B.

Chọn B = 1 => A = 2 $\Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(2;1)$

TH2: B = -2A

Chọn A = 2 => B = -4 $\Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(2;-4)$

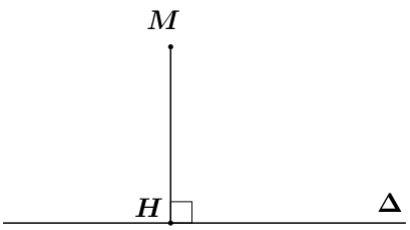
$\Rightarrow \Delta: 2(x+2)-4(y-0)=0\Leftrightarrow x+2-2(y-0)=0\Leftrightarrow x-2y+2=0.$

III. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

Cho đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0\ \left(a^2+b^2>0\right)$ và điểm $M(x_0;y_0)$.

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ, kí hiệu là $d(M,\Delta)$, được tính bởi công thức sau:

$$d(M,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



Chú ý: Nếu $M \in \Delta$ thì $d(M,\Delta)=0$.

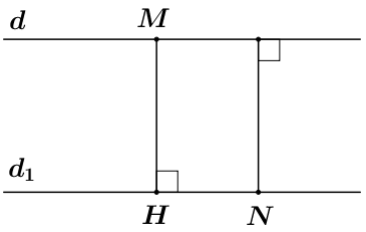
Ví dụ 7: Cho đường thẳng $\Delta: x-3y+3=0$.

a) Tính khoảng cách từ điểm A(4;-1) đến đường thẳng Δ.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song Δ và $\Delta_1: x-3y-3=0$.

Cách giải:

a) Ta có: $d(A,\Delta)=\dfrac{|4-3.(-1)+3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\sqrt{10}$.



b) Lấy M(-3;0) $\in \Delta$. Ta có: $d(M,\Delta_1)=\dfrac{|(-3)-3.0-3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.

Vì hai đy Δ và Δ_1 song song nên khoảng cách giữa hai đường thẳng đó bằng $d(M,\Delta_1)=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.

$d(\Delta,\Delta_1)=d(M\in\Delta,\Delta_1)=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.

Ví dụ 9: Trong mặt phẳng Oxy, tính khoảng cách từ điểm A(3;4) đến đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1-t\\y=3-2t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Cách giải:

Đường thẳng Δ đi qua điểm M(1;3) và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;-2)\Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n}=(2;-1)$.

Phương trình tổng quát của Δ là: $2(x-1)-1(y-3)=0\Leftrightarrow 2x-y+1=0$.

Khoảng cách từ A đến Δ là: $d(A,\Delta)=\dfrac{|2.3-4+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 10: Trong mặt phẳng Oxy, tìm n để khoảng cách từ điểm I(2;3) đến đường thẳng d: x + ny – 1 – 2n = 0 bằng 1.

Cách giải:

Ta có: $d(I;d)=\dfrac{|2+3n-1-2n|}{\sqrt{1+n^2}}=1$

$\Leftrightarrow |1+n|=\sqrt{1+n^2}\Leftrightarrow n=0.$

Ví dụ 11: Trong mặt phẳng Oxy, tìm tọa độ điểm A thuộc đường thẳng d: x – 2y + 1 = 0 và có khoảng cách đến đường thẳng $d_1: x+y+1=0$ bằng $3\sqrt{2}$.

Cách giải:

Giả sử A(x;y).

Do $A \in d$ nên A(2y-1;y).

Ta có: $d(A;d_1)=2 \Leftrightarrow \frac{|2y-1+y+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2} \Leftrightarrow |3y|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-2 \end{array}\right.$.

Với y = 2 => A(3;2).

Với y = -2 => A(-5;-2).

Ví dụ 12: Trong mặt phẳng Oxy, lập phương trình đường thẳng d song song với $\Delta: 3x-4y+12=0$ và d cách A(2;3) một khoảng là 2.

Cách giải:

Vì $d//\Delta: 3x-4y+12=0$ nên d có dạng $3x-4y+c=0$ (điều kiện: $c \neq 12$).

Vì $d(A,d)=2 \Leftrightarrow \frac{|3.2-4.3+c|}{5}=2 \Leftrightarrow |c-6|=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=16\ (tm) \\ c=-4\ (tm) \end{array}\right.$.

Vậy có hai đường thẳng d thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\left[\begin{array}{l} d_1: 3x-4y+16=0 \\ d_2: 3x-4y-4=0 \end{array}\right.$.

Ví dụ 13: Trong mặt phẳng Oxy, lập phương trình đường thẳng d đi qua A(1;2) và cách đều hai điểm M(5;1), N(3;-1).

Cách giải:

Gọi vectơ pháp tuyến của đường thẳng d là $\vec{n}=(a;b)$. Điều kiện: $a^2+b^2 \neq 0$.

Khi đó đường thẳng d đi qua A(1;2) nhận vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$ có dạng:

$$a(x-1)+b(y-2)=0 \Leftrightarrow d: ax+by-a-2b=0.$$

Vì đường thẳng d cách đều hai điểm M(5;1); N(3;-1)

$$\Leftrightarrow d(M;d)=d(N;d) \Leftrightarrow \frac{|5a+b-a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3a-b-a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow |4a-b|=|2a-3b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a-b=2a-3b \\ 4a-b=-2a+3b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ 3a=2b \end{array}\right.$$

Với a = -b ta chọn $\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \end{array}\right. \Rightarrow d: x-y+1=0$.

Với 3a = 2b ta chọn $\left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=3 \end{array}\right. \Rightarrow d: 2x+3y-8=0.$

Ví dụ 14: Có hai con tàu A và B cùng xuất phát từ hai bến, chuyển động đều theo đường thẳng ngoài biển. Trên màn hình ra đa của trạm điều kiện (được coi như mặt phẳng tọa độ Oxy với đơn vị trên các trục tính theo ki-lô-mét), sau khi xuất phát t (giờ) $(t \geq 0)$, vị trí của tàu A có tọa độ được xác định bởi công thức $\left\{\begin{array}{l} x=3-35t \\ y=-4+25t \end{array}\right.$, vị trí của tàu B có tọa độ là $N(4-30t;3-40t)$.

a) Tính côsin góc giữa hai đường đi của hai tàu A và B.

b) Sau bao lâu kể từ thời điểm xuất phát hai tàu gần nhau nhất?

c) Nếu tàu A đứng yên ở vị trí ban đầu, tàu B chạy thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng bao nhiêu?

Cách giải:

a) Tàu A di chuyển theo hướng cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{u_1}=(-35;25)$.

Tàu B di chuyển theo hướng cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{u_2}=(-30;-40)$.

Gọi α là góc giữa hai đường đi của hai tàu. Ta có:

$$\cos\alpha=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$$

$$=\frac{\left|(-35).(-30)+25.(-40)\right|}{\sqrt{(-35)^2+25^2}.\sqrt{(-30)^2+(-40)^2}}=\frac{1}{5\sqrt{74}}$$

$$\Rightarrow\alpha\approx 88^0 40'$$

b) Vị trí của tàu A tại thời điểm sau khi xuất phát t (giờ) $(t\geq 0)$ là điểm M có tọa độ là $(3-35t;-4+25t)$.

Vị trí của tàu B tại thời điểm sau khi xuất phát t (giờ) $(t\geq 0)$ là điểm N có tọa độ là $(4-30t;3-40t)$.

Do đó, $\overrightarrow{MN}=(1+5t;7-65t)$. Suy ra:

$$MN=\sqrt{(1+5t)^2+(7-65t)^2}=\sqrt{4250t^2-900t+50}$$

$$=\sqrt{4250\left(t-\frac{9}{85}\right)^2+\frac{40}{17}}\geq\sqrt{\frac{40}{17}}\approx 1,53\ (km)$$

MN nhỏ nhất xấp xỉ bằng 1,53 km khi $t=\frac{9}{85}$ giờ.

c) Vị trí ban đầu của tàu A tại M_0 ứng với t = 0, khi đó $M_0(3;-4)$.

Tàu B di chuyển theo đường thẳng Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(40;-30)$ và đi qua điểm K(4;3).

Phương trình tổng quát của Δ là: $40(x-4)-30(y-3)=0$ hay $4x-3y-7=0$.

Ta có $d(M_0;\Delta)=\frac{|4.3-3.(-4)-7|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{17}{5}=3,4\ (km)$.

Kiểm tra thấy khoảng cách này bằng khoảng cách giữa tàu A tại M_0 và tàu B tại vị trí sau khi xuất phát $t=\frac{31}{250}$ (giờ).

Vậy nếu tàu A đứng yên ở vị trí ban đầu, tàu B chạy thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng 3,4km.