BÀI GIẢNG: GÓC LƯỢNG GIÁC.
GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG (LÝ THUYẾT)
CHUYÊN ĐỀ: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC
MÔN: TOÁN 11 (CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO)
GIÁO VIÊN: NGÔ VĂN TOẢN

MỤC TIÊU

- ✓ *Nhận biết các khái niệm cơ bản về góc lượng giác.*
- ✓ *Nhận biết khái niệm giá trị lượng giác của một góc lượng giác.*
- ✓ *Mô tả bảng giá trị lượng giác của một số góc lượng giác thường gặp; hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác; quan hệ giữa các góc lượng giác có liên quan đặc biệt: bù nhau, phụ nhau, đối nhau, hơn kém nhau π.*

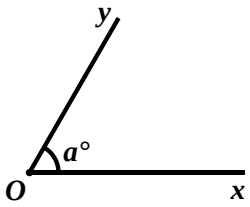
I. ĐƠN VỊ ĐO GÓC

1 Đơn vị đo góc: độ

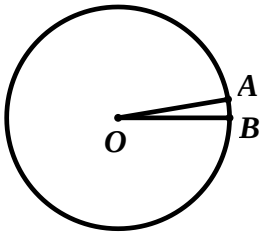
Như chúng ta đã biết, góc (còn được gọi là hình học) là hình gồm hai tia chung gốc.

Mỗi góc có một số đo, đơn vị góc (hình học) là độ.

Số đo góc (hình học) không vượt quá 180^0.



Lớp 9: Nếu ta chia đường tròn thành 360 cung tròn bằng nhau thì góc ở tâm chắn mỗi cung đó là 1^0.



Độ dài đường tròn bán kính R là $2\pi R$.

Độ dài cung tròn có số đo 1^0 là $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$

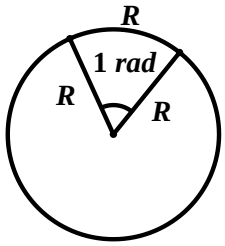
Số đo cung tròn có số đo α^0 là: $l = \frac{\alpha \pi R}{180}$

2 Đơn vị đo góc: radian

Nếu trên đường tròn, ta lấy một cung có độ dài bằng bán kính thì góc ở tâm chắn cung đó gọi là góc có số đo 1 radian, gọi tắt là góc 1 radian.

1 radian còn viết tắt là 1 rad.

Số đo cung tròn có số α rad là: $l = \alpha R$



Nhận xét:

Ta biết góc ở tâm có số đo 180^0 sẽ chắn cung bằng nửa đường tròn (có độ dài bằng πR) nên số đo góc 180^0 bằng $\frac{\pi R}{R}\ rad = \pi\ rad$

Do đó: $1\ rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0 \approx 57^0 17' 45''$

$1^0 = \left(\frac{\pi}{180}\right) rad \approx 0,0175\ rad$

Ví dụ 1: Hoàn thiện bảng sau:

a^0	90^0		120^0		145^0		150^0		180^0
$\alpha\ rad$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{6}$		2π	

Cách giải:

a^0	90^0	60^0	120^0	45^0	145^0	30^0	150^0	360^0	180^0
$\alpha\ rad$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{29\pi}{36}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	2π	π

Ví dụ 2: Cho đường tròn có bán kính R = 5. Tính chiều dài các cung tròn có số đo:

a) $a^0 = 120^0$

b) $\alpha = \frac{3\pi}{4}(rad)$

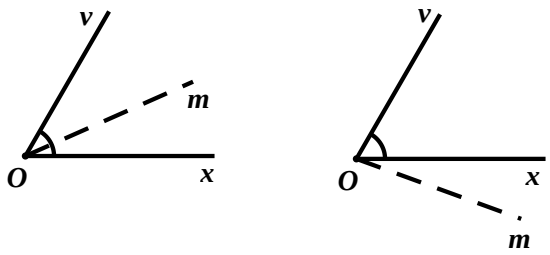
Cách giải:

a) $l = \frac{120.\pi.5}{180} = \frac{10\pi}{3}$ (đvđd)

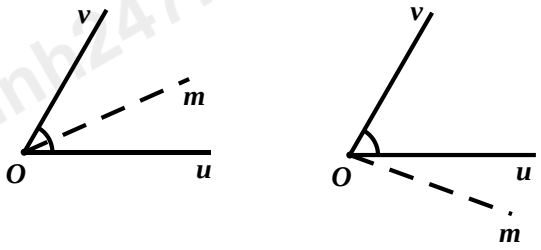
b) $l = \alpha R = \frac{3\pi}{4}.5 = \frac{15\pi}{4}$

II. GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC

1 Góc lượng giác



Ta chọn chiều dương là chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ và chiều quay cùng chiều quay của kim đồng hồ là chiều âm.



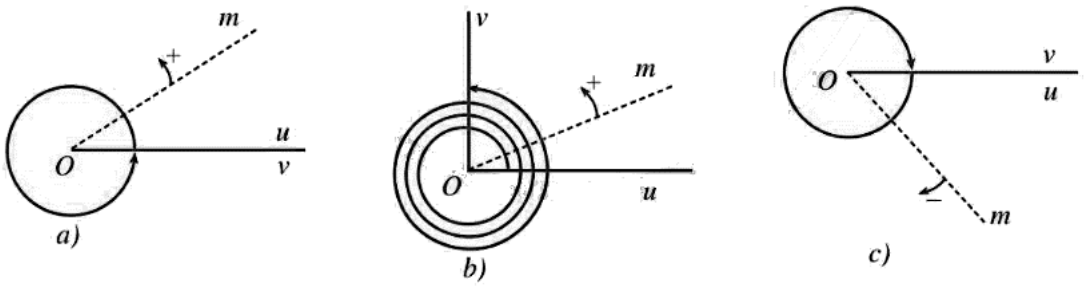
Cho hai tia Ou, Ov. Nếu tia Om quay chỉ theo chiều dương (hay chỉ theo chiều âm) xuất phát từ tia Ou đến trùng với tia Ov thì ta nói: Tia Om quét một góc lượng giác với tia đầu Ou và tia cuối Ov, kí hiệu là (Ou, Ov).

Chú ý: Một vòng quay theo chiều dương tương ứng với góc quay 360^0, một vòng quay theo chiều âm tương ứng với góc quay -360^0.

Khi tia Om quay:

- Nửa vòng theo chiều dương thì ta nói Om quay góc $\frac{1}{2}.360^0 = 180^0$
- $\frac{1}{6}$ vòng theo chiều dương thì ta nói Om quay góc $\frac{1}{6}.360^0 = 60^0$
- $\frac{5}{4}$ vòng quay chiều âm thì ta nói Om quay góc $\frac{5}{4}.\left(-360^0\right) = -450^0$

Ví dụ:



a) $\left(Ou, Ov\right) = 360^0 = 2\pi\left(rad\right)$

b) $\left(Ou, Ov\right) = 90^0 + 360^0 + 360^0 = 90^0 + 3.360^0 = \frac{\pi}{2} + 3.2\pi\ \left(rad\right)$

c) $(Ou,Ov)=-360^0=-2\pi$

Nhận xét:

Khi tia Om quay góc a^0 thì góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo là a^0 (hay $\frac{\pi a}{180}$ rad)

Vì thế, mỗi một góc lượng giác đều có một số đo, đơn vị đo góc lượng giác là độ hoặc radian.

Nếu góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo bằng a^0 (hoặc α rad) thì ta kí hiệu là sđ(Ou, Ov) $=a^0$ (hoặc α) hoặc $(Ou,Ov)=a^0$ (hoặc α).

Mỗi góc lượng góc gốc O được xác định bởi tia đầu Ou, tia cuối Ov và số đo của góc đó.

Nhận xét: Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Ou và tia cuối Ov sai khác nhau một bội nguyên của 360^0 nên ta có công thức tổng quát là:

Sđ$(Ou,Ov)=a^0+k360^0$ (hoặc $\alpha+k2\pi$), $(k\in\mathbb{Z})$,

thường viết là $(Ou,Ov)=a^0+k360^0\left((Ou,Ov)=a+k2\pi\right)$ với $a^0(\alpha)$ là số đo của một góc lượng giác bất kì có tia đầu Ou và tia cuối Ov.

Ví dụ: Hãy biểu diễn trên mặt phẳng góc lượng giác trong mỗi trường hợp sau:

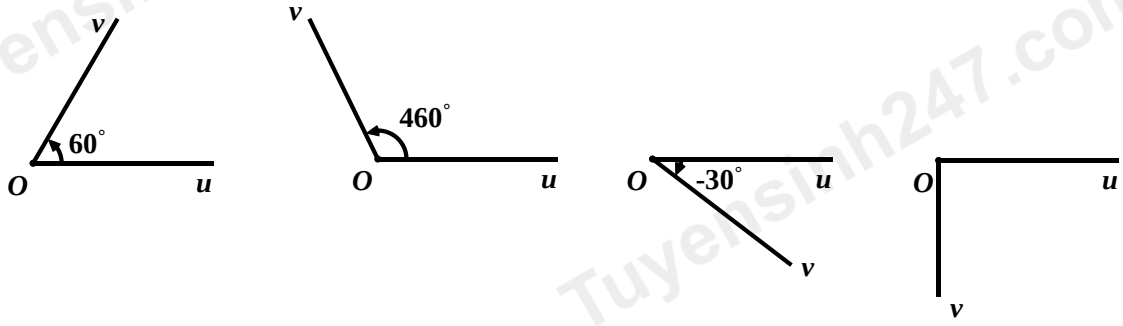
a) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou, tia cuối Ov và có số đo 60^0.

b) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou, tia cuối Ov và có số đo 460^0.

c) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou, tia cuối Ov và có số đo $\frac{-\pi}{6}$.

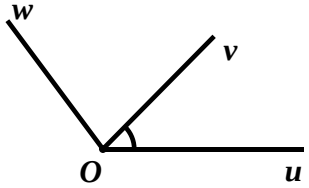
d) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou, tia cuối Ov và có số đo $\frac{-13\pi}{2}$.

Cách giải:



Hệ thức Sác – lơ:

Với ba tia tùy ý Ou, Ov, Ow, ta có: $(Ou,Ov)+(Ov,Ow)=(Ou,Ow)+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$



Ví dụ: Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $\frac{5\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $\frac{13\pi}{4}$. Tìm số đo của góc lượng giác (Ov, Ow).

Cách giải:

Theo hệ thức Sac – lơ:

$$(Ou,Ov)+(Ov,Ow)=(Ou,Ow)+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow (Ov,Ow)=(Ou,Ow)-(Ou,Ov)+k2\pi$$

$$=\frac{13\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}+k2\pi=2\pi+k2\pi$$

$$\Rightarrow (Ou,Ow)=2\pi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$$

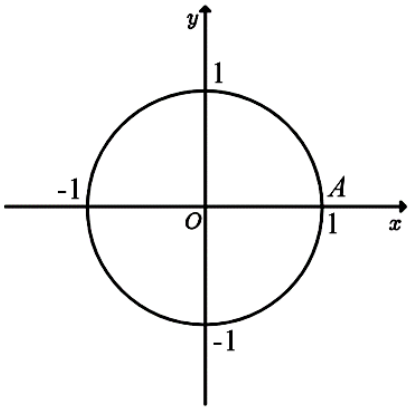
$$\Rightarrow Ou\equiv Ow$$

2 Đường tròn lượng giác

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn tâm O bán kính bằng 1. Trên đường tròn này, chọn điểm

A(1; 0) làm gốc, chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ và chiều âm là chiều cùng chiều kim đồng hồ.

Đường tròn cùng với gốc và chiều như trên được gọi là đường tròn lượng giác.



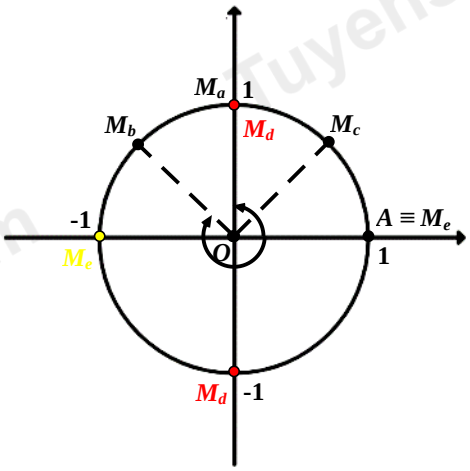
Với mỗi góc lượng giác $a^0(\alpha\ rad)$ tồn tại duy nhất điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho: $(OA,OM)=a^0(\alpha\ rad)$

Ví dụ 1: Xác định các điểm M trên đường tròn lượng giác biết:

a) $(OA,OM)=\frac{\pi}{2}$ b) $(OA,OM)=-\frac{3\pi}{4}$ c) $(OA,OM)=-\frac{15\pi}{4}$

d) $(OA,OM)=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ e) $(OA,OM)=k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Cách giải:

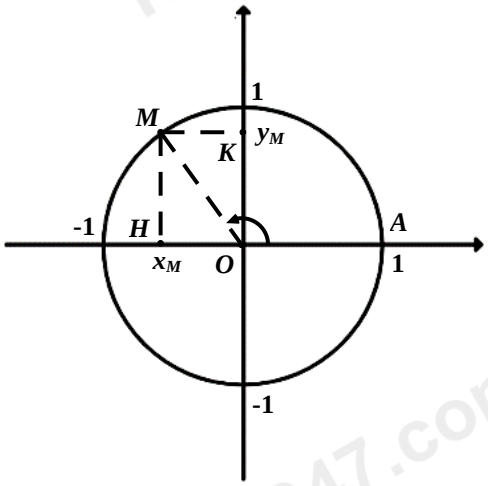


III. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC LƯỢNG GIÁC

1 Định nghĩa

Trong trường hợp tổng quát, với mỗi góc lượng giác α, lấy điểm M trên đường tron lượng giác sao cho $(OA,OM)=\alpha$.

Gọi tọa độ của điểm M trong hệ tọa độ Oxy là $(x_M;y_M)$. Khi đó:



$\cos\alpha = x_M$

$\sin\alpha = y_M$

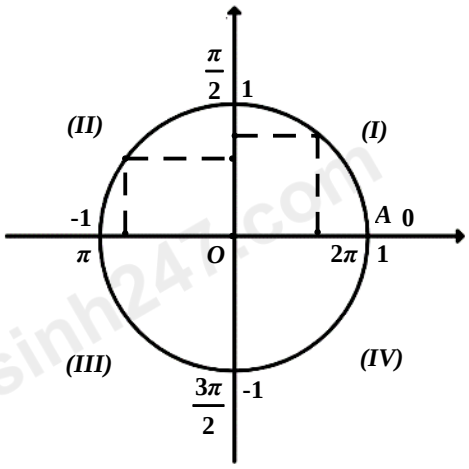
Nếu $\cos\alpha \neq 0, \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cot\alpha}$ $\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right)$

Nếu $\sin\alpha \neq 0, \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\left(\alpha \neq k\pi, k\in\mathbb{Z}\right)$

Tính chất 1:

- $-1 \le \sin\alpha, \cos\alpha \le 1$
- Hệ thức lượng giác cơ bản:
  + $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$
  + $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
  + $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha + 1; \dfrac{1}{\sin^2\alpha} = \cot^2\alpha + 1$

Tính chất 2: Dấu giá trị lượng giác ở góc phần tư



α	$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	$\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\tan\alpha$	+	–	+	–
$\cot\alpha$	+	–	+	–

Ví dụ: Cho góc lượng giác $\alpha\begin{cases}\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi\\ \sin\alpha=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{cases}$. Tìm $\cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.

Cách giải:

+ Ta có: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{1}{2}$

Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \cos\alpha > 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\sqrt{3}$

$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

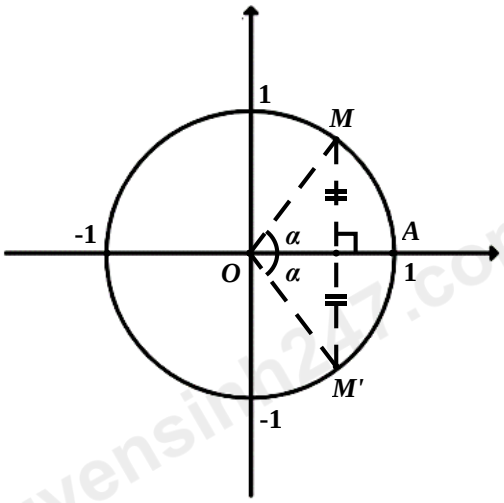
2 Giá trị lượng giác của các góc có mối liên hệ đặc biệt

$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha, k \in \mathbb{Z}$

$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha, k \in \mathbb{Z}$

$\tan(\alpha + k2\pi) = \tan\alpha, k \in \mathbb{Z}$

$\cot(\alpha + k2\pi) = \cot\alpha, k \in \mathbb{Z}$



$(OA, OM) = \alpha$

*** Hai góc đối α và $-\alpha$**

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\Rightarrow$ $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

*** Hai góc bù nhau α và $\pi - \alpha$**

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
$\Rightarrow$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$
$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

*** Hai góc phụ nhau α với $\frac{\pi}{2} - \alpha$**

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$
$\Rightarrow$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$
$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

*** Hai góc hơn kém π: α với $\alpha + \pi$**

$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$
$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$
$\Rightarrow$ $\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$
$\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha$

Ví dụ: Tính giá trị: $A = \sin^2(\alpha + 4\pi) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\alpha + \frac{\tan\alpha}{\sin(-\alpha)}.\cos^2(\alpha + \pi)$.

Cách giải:

$A = \sin^2(\alpha + 4\pi) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\alpha + \frac{\tan\alpha}{\sin(-\alpha)}.\cos^2(\alpha + \pi)$

$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos\alpha + \frac{\tan\alpha}{-\sin\alpha}.(\cos\alpha)^2$

$= 1 + \cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{1}{-\sin\alpha}.\cos^2\alpha$

$= 1 + \cos\alpha - \cos\alpha = 1$