BÀI GIẢNG: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC – TIẾT 1
CHUYÊN ĐỀ: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC
MÔN: TOÁN 11 (KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG)
GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

MỤC TIÊU

- ✓ *Nhận biết các khái niệm về hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn.*
- ✓ *Nhận biết các đặc trưng hình học của đồ thị hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn.*

HOẠT ĐỘNG MỞ ĐẦU

Giả sử vận tốc v (tính bằng lít/giây) của luồng khí trong một chu kì hô hấp (tức là thời gian từ lúc bắt đầu của một nhịp thở đến khi bắt đầu nhịp thử tiếp theo) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi được cho bởi công thức

$$v = 0{,}85\sin\frac{\pi t}{3}$$

trong đó t là thời gian (tính bằng giây). Hãy tìm thời gian của một chu kì hô hấp đầy đủ và số chu kì hô hấp trong một phút của người đó.

1 Định nghĩa hàm số lượng giác

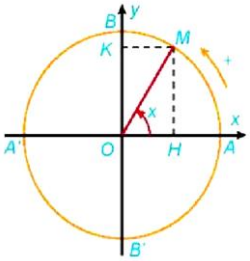
HĐ1 Hoàn thành bảng sau:

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\frac{\pi}{6}$	?	?	?	?
0	?	?	?	?
$-\frac{\pi}{2}$	?	?	?	?

Cách giải:

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
0	0	1	0	||
$-\frac{\pi}{2}$	-1	0	||	0

Với mỗi số thực x, ta xác định được duy nhất một điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho số đo của góc lượng giác (OA, OM) bằng x. Do đó, ta luôn xác định được các giá trị lượng giác sinx và cosx của x lần lượt là tung độ và hoành độ của điểm M. Nếu $\cos x \neq 0$, ta định nghĩa $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ và nếu $\sin x \neq 0$, ta định nghĩa $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.



sin tung, cos hoành.

Từ đây, ta có định nghĩa sau về các hàm số lượng giác.

- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực sinx được gọi là hàm số sin, kí hiệu là y = sinx.
  Tập xác định của hàm số sin là $\mathbb{R}$.
- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực cosx được gọi là hàm số côsin, kí hiệu là y = cosx.
  Tập xác định của hàm số côsin là $\mathbb{R}$.
- Hàm số cho bởi công thức $y=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là hàm số tang, kí hiệu là y = tanx.
  Tập xác định của hàm số tang là $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.
- Hàm số cho bởi công thức $y=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là hàm số côtang, kí hiệu là y = cotx.
  Tập xác định của hàm số côtang là $\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

Mở rộng tổng quát tìm ĐKXĐ:

$y=\sin u(x)$ → u(x) xác định.

$y=\cos u(x)$ → u(x) xác định.

$y=\tan u(x)$ → $u(x)\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

$y=\cot u(x)$ → $u(x)\neq k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Ví dụ 1: Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\cos x}$.

Cách giải:

Biểu thức $\dfrac{1}{\cos x}$ có nghĩa khi $\cos x\neq 0$, tức là $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Luyện tập 1 Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$.

Cách giải:

ĐKXĐ: $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

VD mở rộng Tìm tập xác định:

a) $y=\sin\sqrt{x}$ b) $y=\cos\dfrac{1}{x^2-4}$ c) $y=\tan 2x$ d) $y=\cot\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Cách giải:

a) $y=\sin\sqrt{x}$

ĐKXĐ: $x\ge 0$.

TXĐ: $D=[0;+\infty)$.

b) $y=\cos\dfrac{1}{x^2-4}$

ĐKXĐ: $x^2-4\ne 0\Leftrightarrow x\ne\pm 2$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$.

c) $y=\tan 2x$

ĐKXĐ: $2x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\ne\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d) $y=\cot\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

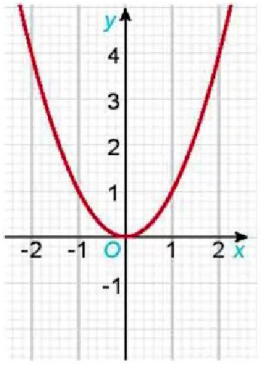
ĐKXĐ: $x-\dfrac{\pi}{4}\ne k\pi\Leftrightarrow x\ne\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

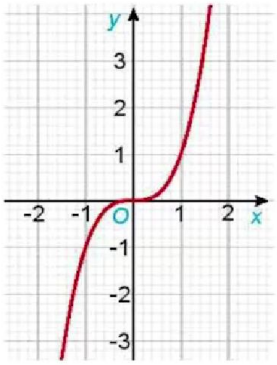
2 Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn

a. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

HĐ2 Cho hai hàm số $f(x)=x^2$ và $g(x)=x^3$, với các đồ thị như hình dưới đây:



Đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2$



Đồ thị hàm số $y = g(x) = x^3$

a) Tìm các tập xác định D_f, D_g của các hàm số f(x) và g(x).

b) Chứng tỏ rằng $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$. Có nhận xét gì về tính đối xứng của đồ thị hàm số y = f(x) đối với hệ trục toạ độ Oxy?

c) Chứng tỏ rằng $g(-x) = -g(x)$, $\forall x \in D_g$. Có nhận xét gì về tính đối xứng của đồ thị hàm số y = g(x) đối với hệ trục toạ độ Oxy?

Cách giải:

a) Tập xác định của hàm số đã cho là: $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$.

b) Ta có: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

Đồ thị của hàm số $y = f(x) = x^2$ đối xứng qua trục tung.

c) Ta có: $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.

Đồ thị của hàm số $y = g(x) = x^3$ đối xứng qua gốc toạ độ.

Cho hàm số y = f(x) có tập xác định D.

- Hàm số f(x) được gọi là hàm số chẵn nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

Đồ thị của một hàm số chẵn nhận trục tung là trục đối xứng.

- Hàm số f(x) được gọi là hàm số lẻ nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Đồ thị của một hàm số lẻ nhận gốc toạ độ là tâm đối xứng.

Ví dụ Xét tính chẵn lẻ:

a) $y = x^4 + x^2 + 3$ b) $y = x^3 - x$ c) $y = x^2 + x + 1$ d) $y = |x|$

e) $y = \dfrac{1}{x-3}$ f) $y = \sqrt{x+1}$

Cách giải:

a) Hàm số chẵn.

b) Hàm số lẻ.

c) Hàm không chẵn, không lẻ.

d) Hàm số chẵn.

e) Hàm không chẵn, không lẻ.

f) Hàm không chẵn, không lẻ.

Nhận xét

Để vẽ đồ thị của một hàm số chẵn (tương ứng, lẻ), ta chỉ cần vẽ phần đồ thị của hàm số với những x dương, sau đó lấy đối xứng phần đồ thị đã vẽ qua trục tung (tương ứng, qua gốc toạ độ), ta sẽ được đồ thị của hàm số đã cho.

Ví dụ 2 Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = x\sin x$.

Cách giải:

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Do đó, nếu x thuộc tập xác định D thì -x cũng thuộc tập xác định D.

Ta có: $f(-x) = (-x)\sin(-x) = x\sin x = f(x),\ \forall x \in D$.

Vậy f(x) = xsinx là hàm số chẵn.

Luyện tập 2 Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $g(x) = \frac{1}{x}$.

Cách giải:

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Do đó, nếu x thuộc tập xác định D thì -x cũng thuộc tập xác định D.

Ta có: $g(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -g(x)$.

Vậy $g(x) = \frac{1}{x}$ là hàm số lẻ.

b. Hàm số tuần hoàn

HĐ3 So sánh:

a) $\sin(x+2\pi)$ và $\sin x$

b) $\cos(x+2\pi)$ và $\cos x$

c) $\tan(x+\pi)$ và $\tan x$

d) $\cot(x+\pi)$ và $\cot x$

Cách giải:

a) $\sin(x+2\pi) = \sin x\ \forall x \in \mathbb{R}$

b) $\cos(x+2\pi) = \cos x\ \forall x \in \mathbb{R}$

c) $\tan(x+\pi) = \tan x\ \forall x \in \mathbb{R}$

d) $\cot(x+\pi) = \cot x\ \forall x \in \mathbb{R}$

Hàm số y = f(x) có tập xác định D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có:

i) $x+T \in D$ và $x-T \in D$.

ii) $f(x+T)=f(x)$.

Số T dương nhỏ nhất thoả mãn các điện kiện trên (nếu có) được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn đó.

$\Rightarrow y=\sin x$ và $y=\cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

$y=\tan x$ và $y=\cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π.



Hàm số hằng f(x) = c (c là hằng số) có phải là hàm số tuần hoàn không? Nếu hàm số tuần hoàn thì nó có chu kì không?

Cách giải:

$y=f(x)=c$ (const)

+ $D=\mathbb{R}$, với mọi T > 0 bất kì và $\forall x \in D$, ta có:

i) $x+T \in D,\ x-T \in D$

ii) $f(x+T)=f(x)=c$.

=> Hàm số tuần hoàn với chu kì T > 0 bất kì.

Nhận xét

a) Các hàm số $y=\sin x$ và $y=\cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π. Các hàm số $y=\tan x$ và $y=\cot x$ tuần hoàn với chu kì π.

b) Để vẽ đồ thị của một hàm số tuần hoàn với chu kì T, ta chỉ cần vẽ đồ thị của hàm số này trên đoạn $[a;a+T]$, sau đó dịch chuyển song song với trục hoành phần đồ thị đã vẽ sang phải và sang trái các đoạn có độ dài lần lượt là T, 2T, 3T, … ta được toàn bộ đồ thị của hàm số.

Ví dụ 3 Xét tính tuần hoàn của hàm số $y=\sin 2x$.

Cách giải:

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ và với mọi số thực x, ta có:

$$x-\pi \in \mathbb{R},\ x+\pi \in \mathbb{R}$$

$$\sin 2(x+\pi)=\sin(2x+2\pi)=\sin 2x$$

Vậy y = sin2x là hàm số tuần hoàn.

Chú ý Tổng quát người ta chứng minh được các hàm số $y=A\sin\omega x$ và $y=A\cos\omega x$ $(\omega>0)$ là những hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

Luyện tập 3 Xét tính tuần hoàn của hàm số y = tan2x.

Cách giải:

Hàm số có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ và với mọi số thực $x\in D$, ta có $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\in D$, $\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\in D$, $\tan 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\tan\left(2x+\pi\right)=\tan 2x$.

Vậy y = tan2x là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\frac{\pi}{2}$.

Mở rộng:

$y=\sin\left(ax+b\right)\to T=\frac{2\pi}{|a|}$

$y=\cos\left(ax+b\right)\to T=\frac{2\pi}{|a|}$

$y=\tan\left(ax+b\right)\to T=\frac{\pi}{|a|}$

$y=\cot\left(ax+b\right)\to T=\frac{\pi}{|a|}$

$y=f\left(x\right)\pm g\left(x\right)$

$y=f\left(x\right)\to T_1$

$y=g\left(x\right)\to T_2$

$y=f\left(x\right)\pm g\left(x\right)=BCNN\left(T_1;T_2\right)$.

Ví dụ:

+) $f\left(x\right)$ có chu kì $T_1=\pi$, $g\left(x\right)$ có chu kì $\frac{\pi}{4}\Rightarrow f\left(x\right)\pm g\left(x\right)$ có chu kì $T=\pi$.

+) $f\left(x\right)$ có chu kì $T_1=\frac{\pi}{3}$, $g\left(x\right)$ có chu kì $\frac{\pi}{4}\Rightarrow f\left(x\right)\pm g\left(x\right)$ có chu kì $T=\pi$.