# BÀI GIẢNG: DÃY SỐ
## CHUYÊN ĐỀ: DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN
## MÔN: TOÁN 11 (CƠ BẢN & NÂNG CAO)
## GIÁO VIÊN: NGÔ VĂN TOẢN

**MỤC TIÊU**

- ✓ *Khái niệm dãy số vô hạn, dãy số hữu hạn.*
- ✓ *Các cách cho một dãy số.*
- ✓ *Nhận biết và chứng minh dãy số tăng, dãy số giảm.*
- ✓ *Nhận biết và chứng minh dãy số bị chặn.*

## A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

### I. KHÁI NIỆM

**a. Dãy số vô hạn**

Mỗi hàm số $u_n$ xác định trên tập số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu

$$u:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$$
$$n\to u(n)$$

Dãy số thường được viết dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$

Trong đó $u_n=u(n)$ là số hạng thứ $n$ và gọi nó là số hạng tổng quát, $u_1$ là số hạng đầu của dãy số $u(n)$.

Ví dụ: Cho dãy số $(u_n)$ có $u_n=2n-3,\ n\in\mathbb{N}^*$.

Khi đó: $u_1=2.1-3=-1,\ u_2=2.2-3=1,\ u_{10}=2.10-3=17$.

**b. Dãy số hữu hạn**

Một hàm số $u_n$ xác định trên tập $M=\{1;2;3;...;m\}$, với $m\in\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.

Dạng khai triển của nó là: $u_1, u_2, u_3, ..., u_m$, trong đó $u_1$ là số hạng đầu, $u_m$ là số hạng cuối.

Ví dụ: Cho dãy số $(u_n)$, có $u_n=\sqrt{n-1}+\sqrt{4-n},\ n\in\mathbb{N}^*$.

Ta có $n\in\{1;2;3;4\}$. Khi đó: $u_1=\sqrt{3},\ u_2=1+\sqrt{2},\ u_3=1+\sqrt{2},\ u_4=\sqrt{3}$.

### II. CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

1) Liệt kê

2) Dãy số cho bằng công thức số hạng tổng quát

3) Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi (hay quy nạp)

4) Dãy số cho bằng phương pháp mô tả.

**a. Liệt kê**

Thường áp dụng cho các dãy số hữu hạn.

Ví dụ: Cho dãy số $(u_n)$ có $u_n = \sqrt{n-1} + \sqrt{4-n},\ n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $n \in \{1;2;3;4\}$. Khi đó:

$u_1 = \sqrt{3},\ u_2 = 1+\sqrt{2},\ u_3 = 1+\sqrt{2},\ u_4 = \sqrt{3}$.

**b. Dãy số cho bằng công thức số hạng tổng quát**

Khi đó $u_n = f(n)$, trong đó $f$ là một hàm số xác định trên $\mathbb{N}^*$.

Đây là cách khá thông dụng (giống như hàm số) và nếu biết giá trị của n (hay cũng chính là số tứ tự của số hạng) thì ta có thể tính ngay được $u_n$.

Ví dụ: Cho dãy số $(u_n)$, có $u_n = 2n-3,\ n \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó: $u_1 = 2.1-3 = -1,\ u_2 = 2.2-3 = 1,\ u_{10} = 2.10-3 = 17$.

**c. Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi (hay quy nạp)**

+) Cho số hạng thứ nhất (hoặc một vài số hạng đầu)

+) Với $n \geq 2$, cho một công thức tính $u_n$, nếu biết $u_{n-1}$ (hoặc một vài số hạng đứng trước đó_.

Chẳng hạn, các công thức có thể là:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_n = f(u_{n-1}),\ n \geq 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = a,\ u_2 = b \\ u_n = f(u_{n-1}; u_{n-2}),\ n \geq 3 \end{cases}.$$

**d. Dãy số cho bằng phương pháp mô tả**

Người ta cho một mệnh đề mô tả cách xác định các số hạng liên tiếp của dãy số. Tuy nhiên, thường thì không tìm được ngay $u_n$ với n tuỳ ý.

## III. DÃY SỐ TĂNG. DÃY SỐ GIẢM

+ Dãy số $u_n$ được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1} > u_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

+ Dãy số $u_n$ được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ:

+) Cho dãy số $(u_n)$ có $u_n = 2n-3,\ n \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó: $u_1 = 2.1-3 = -1,\ u_2 = 2.2-3 = 1,\ u_{10} = 2.10-3 = 17$.

Đây là dãy số tăng.

## IV. DÃY SỐ BỊ CHẶN

+ Dãy số $u_n$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho: $u_n \leq M,\ n \in \mathbb{N}^*$.

+ Dãy số $u_n$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số m sao cho: $u_n \geq m,\ n \in \mathbb{N}^*$.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

### I. DẠNG 1: XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG THỨ n CỦA DÃY SỐ

**Phương pháp**

**a. Cho bởi công thức số hạng tổng quát**

Cho dãy số $(u_n)$ được xác định bởi công thức số hạng tổng quát. Muốn tìm các số hạnh $u_1, u_2, u_3, ...$ ta lần lượt thay n = 1, 2, 3, …

**b. Đối với dãy số cho bằng hệ thức truy hồi**

+ Giả thiết đã cho số hạng đầu hay vài số hạng đầu của dãy.

+ Dựa vào hệ thức truy hồi ta sẽ xác định được các số hạng của dãy số, vì đã biết các số hạnh đứng trước nó.

**Ví dụ 1:** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2}$. Hãy tính 6 số hạng đầu của dãy số.

**Cách giải:**

Ta có:

$u_1 = \dfrac{2.1+1}{1^2} = 3$

$u_2 = \dfrac{2.2+1}{2^2} = \dfrac{5}{4}$

$u_3 = \dfrac{2.3+1}{3^2} = \dfrac{7}{9}$

**Ví dụ 2:** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$. Hỏi dãy số có bao nhiêu số hạng là số nguyên?

**Cách giải:**

Ta có: $u_n = 2 - \dfrac{3}{n+2}$

$u_n$ là số nguyên khi $\dfrac{3}{n+2}$ là số nguyên.

Khi đó: $\left[\begin{array}{l} n+2 = \pm 1 \\ n+2 = \pm 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -3\ (KTM) \\ n = -1\ (KTM) \\ n = 1\ \ (TM) \\ n = -5\ (KTM) \end{array}\right.$

Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên có 1 giá trị n thoả mãn. Vậy dãy số có 1 số hạng là số nguyên $u_1 = 1$.

**Ví dụ 3:** Cho dãy số $(u_n)$ có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Tính $u_{2019}$.

**Cách giải:**

Ta có:

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+...+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}\right)$$
$$= \frac{1}{2}.\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}.\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$
$$\Rightarrow u_{2019} = \frac{2019}{2.2019+1}=\frac{2019}{4039}$$

**Ví dụ 4:** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - n \end{cases}$ với $n \geq 1$. Tìm số hạng $u_2$, $u_5$ của dãy.

**Cách giải:**

+ Ta có: $u_2 = 3u_1 - 1 = 3.2 - 1 = 5$.

+ Để tính $u_n$, ta tính $u_4$, để tính $u_4$ ta tính $u_3$.

+ Từ hệ thức truy hồi ta có $u_3 = 3u_2 - 2 = 3.5 - 2 = 13$, $u_4 = 3u_3 - 3 = 3.13 - 3 = 36$.

+ Từ đó ta được $u_5 = 3u_4 - 4 = 3.36 - 4 = 104$.

**Ví dụ 5:** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -1,\ u_2 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} \end{cases}$ với $n \geq 2$. Tìm 5 số hạng đầu của dãy.

**Cách giải:**

+ Ta có: $u_1 = -1,\ u_2 = 3$.

+ Từ hệ thức truy hồi ta có:

$u_3 = u_2 + 2u_1 = 3 + 2.(-1) = 1$
$u_4 = u_3 + 2u_2 = 1 + 2.3 = 7$
$u_5 = u_4 + 2u_3 = 7 + 2.1 = 9$

## II. DẠNG 2: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

**Phương pháp**

**Cách 1:** Xét dấu của biểu thức $u_{n+1} - u_n$.

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $(u_n)$ là dãy số tăng.
- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $(u_n)$ là dãy số giảm.

**Cách 2:** Xét $u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì có thể so sánh $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $(u_n)$ là dãy số tăng.

• Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ thì $(u_n)$ là dãy số giảm.

**Cách 3:** Nếu dãy số $(u_n)$ được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể dự đoán và sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp để chỉ ra $u_{n+1}>u_n$ (hoặc $u_{n+1}<u_n$).

**Ví dụ 1:** Chứng minh dãy số $(u_n)$ là dãy số tăng, biết: $u_n=2^n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

**Cách giải:**

Cách 1:

+ Ta có: $u_n=2^n\Rightarrow u_{n+1}-u_n=2^{n+1}-2^n=2^n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ nên dãy số $(u_n)$ là dãy số tăng.

Cách 2: $u_n=2^n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Xét $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}=2^{n+1-n}=2>1$

$\Rightarrow u_{n+1}>u_n\ \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow(u_n)$ là dãy số tăng.

**Ví dụ 2:** Chứng minh dãy số $(u_n)$ là dãy số tăng, biết: $u_n=\frac{n^2+1}{n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

**Cách giải:**

Ta có: $u_n=\frac{n^2+1}{n}=n+\frac{1}{n}$.

$\Rightarrow u_{n+1}-u_n=1+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n^2+n-1}{n(n+1)}>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

nên dãy đã cho tăng.

**Ví dụ 3:** Chứng minh dãy số $(u_n)$ là dãy số tăng, biết: $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=1+u_1.u_2.u_3...u_n\end{cases},\ n\in\mathbb{N}^*$.

**Cách giải:**

Ta có:

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=1+u_n(u_1u_n...u_{n-1}-1)\\&=1+u_n(1+u_1u_n...u_{n-1}-2)\\&=1+u_n(u_n-2)=(u_n-1)^2>0\ \forall n\ge 2\end{aligned}$$

Vậy $(u_n)$ là dãy số tăng.

**Ví dụ 4:** Xét tính tăng giảm của dãy số $(u_n)$ biết:

a) $u_n=(-1)^n(2^n+1)$ b) $u_n=\frac{3^n}{2^{n+1}}$

**Cách giải:**

a) $u_n = (-1)^n (2^n + 1)$

Ta có: $u_1 = -3, u_2 = 5, u_3 = -9$, từ đó suy ra dãy số $(u_n)$ là dãy không tăng không giảm.

b) $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$. Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét tỉ số: $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{3^n}{2^{n+1}} . \frac{2^{n+2}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow u_n < u_{n+1}$.

Vậy $(u_n)$ là một dãy số tăng.

**Ví dụ 5:** Cho dãy số $(u_n)$ với $u_n = \frac{an+2}{n+1}$, a là tham số. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số $(u_n)$ là một dãy tăng?

**Cách giải:**

Ta có: $u_n = \frac{an+2}{n+1} = a + \frac{2-a}{n+1}$.

Với $n \geq 1$, xét $u_{n+1} - u_n = \left(a + \frac{2-a}{n+2}\right) - \left(a + \frac{2-a}{n+1}\right) = (a-2)\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$(u_n)$ là dãy tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \ \forall n \geq 1 \Leftrightarrow a > 2$.

## III. DẠNG 3: TÍNH BỊ CHẶN CỦA DÃY SỐ

**Phương pháp**

Để xét tính bị chặn của dãy số $(u_n)$ ta có thể sử dụng các cách sau:

**Cách 1:** Chứng minh dãy số là dãy tăng. Khi đó dãy số bị chặn dưới bởi $u_1$.

Chứng minh dãy số là dãy giảm. Khi đó dãy số bịc chặn trên bởi $u_1$.

**Cách 2:** Dự đoán dãy số bị chặn dưới bởi m, bị chặn trên bởi M.

Hướng 1: Xét hiệu $u_n - m, u_n - M$.

Hướng 2: Bằng phương pháp quy nạp chứng minh dự đoán trên là đúng.

**Ví dụ 1:** Xét tính bị chặn của dãy số $(u_n)$, biết $u_n = (-1)^{n-1} \sin\frac{1}{n}$.

**Cách giải:**

Ta có: $|u_n| = \left|(-1)^{n-1} \sin\frac{1}{n}\right| = \left|\sin\frac{1}{n}\right| \leq 1$ nên $(u_n)$ là dãy bị chặn.

**Ví dụ 2:** Chứng tỏ dãy số $(u_n)$: $u_n = \frac{n^2+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên.

**Cách giải:**

Cách 1: Ta có: $u_n = \frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n} \geq 2\sqrt{n.\frac{1}{n}} = 2$.

Do đó $(u_n)$ bị chặn dưới bởi 2.

Khi n càng lớn thì $u_n$ càng tăng. Do đó $(u_n)$ không bị chặn trên.

Cách 2: Chứng minh $(u_n)$ là dãy tăng $\Rightarrow (u_n)$ chặn dưới bởi $u_1 = \frac{1^2+1}{1} = 2$.

Xét $u_{n+1} - u_n = \left(n+1+\frac{1}{n+1}\right) - \left(n+\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1}$.

Do $n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1 \ \forall n \Rightarrow \left(1-\frac{1}{n}\right) \geq 0$.

$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

**Ví dụ 3:** Xét tính bị chặn của dãy số: $u_n = \frac{2n-1}{n+3}$, $n \in \mathbb{N}^*$

**Cách giải:**

Ta có: $u_{n+1} - u_n = \frac{2n+1}{n+4} - \frac{2n-1}{n+3} = \frac{2n^2+7n+3-2n^2-7n+4}{(n+4)(n+3)} = \frac{7}{(n+4)(n+3)} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $(u_n)$ là dãy số tăng.

Ta có $u_n = \frac{2n-1}{n+3} = \frac{2(n+3)-7}{n+3} = 2 - \frac{7}{n+3} < 2$.

Suy ra: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < 2$ nên $(u_n)$ bị chặn trên.

Vì $(u_n)$ là dãy số tăng $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_1 = \frac{1}{4} \leq u_n$ nên dãy $(u_n)$ bị chặn dưới.

**Ví dụ 4:** Xét tính bị chặn của dãy số $(u_n)$, biết $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}, \ n \geq 1 \end{cases}$.

**Cách giải:**

Dự đoán $0 < u_n < 2 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1). Ta chứng minh (1) bằng quy nạp:

Dễ thấy (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$ tức là ta có $0 < u_k < 2$, ta cần chứng minh (1) đúng với n = k + 1.

Thật vậy, xét $u_{k+1} = \sqrt{2+u_k}$. Vì $0 < u_k < 2$ nên $0 < u_k + 2 < 4$, suy ra $0 < \sqrt{u_k+2} < 2 \Leftrightarrow 0 < u_{k+1} < 2$

$\Rightarrow (1)$ đúng với n = k + 1 => đpcm.

Vậy $0 < u_n < 2 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$: dãy số bị chặn.

## IV. DẠNG 4: XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ

**Phương pháp**

Để xác định số hạng tổng quát của dãy số, ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương pháp quy nạp bằng việc thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết một vài số hạng đầu của dãy, từ đó dự đoán công thức $u_n$.

Bước 2: Chứng minh công thức dự đoán bằng phương pháp quy nạp.

**Ví dụ 1:** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = u_{n-1} + 3,\ \forall n \geq 2 \end{cases}$.

a) Tìm 5 số hạng đầu của dãy số đã cho.

b) Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số.

**Cách giải:**

a) Ta lần lượt có:

$u_1 = -2,\ u_2 = u_1 + 3 = 1,\ u_3 = u_2 + 3 = 4$

$u_4 = u_3 + 3 = 7,\ u_5 = u_4 + 3 = 10$

b) Từ giả thiết ta có: $u_n - u_{n-1} = 3,\ \forall n \geq 2$.

Khi đó:

$u_2 - u_1 = 3\ (1)$

$u_3 - u_2 = 3\ (2)$

$u_4 - u_3 = 3\ (3)$

...

$u_n - u_{n-1} = 3\ (n-1)$

Cộng vế theo vế

$\Rightarrow u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + ... + u_n - u_{n-1} = 3(n-1) \Leftrightarrow u_n = u_1 + 3(n-1) = -2 + 3(n-1)$

Chứng minh $u_n = -2 + 3(n-1)$ (*)

+) n = 1, $u_1 = -2 + 3(1-1) = -2 \Rightarrow$ (*) đúng với n = 1.

+) Giả sử (*) đúng với n = k, tức là $u_k = -2 + 3(k-1)$.

+) Ta chứng minh (*) đúng với n = k + 1, tức là $u_{k+1} = -2 + 3(k+1-1) = -2 + 3k$.

Thật vậy: $u_{k+1} = u_k + 3 = -2 + 3(k-1) + 3 = -2 + 3k - 3 + 3 = -2 + 3k$

Vậy $u_n = -2 + 3(n-1) = 3n - 5$.

**Ví dụ 2:** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3\ \forall n \geq 2 \end{cases}$.

1) Viết 5 số hạng đầu của dãy.

2) Chứng minh rằng $u_n = 2^{n+1} - 3$

**Cách giải:**

1) Ta có 5 số hạng đầu của dãy là:

$u_1 = 1,\ u_2 = 2u_1 + 3 = 5$

$u_3 = 2u_2 + 3 = 13$

$u_4 = 2u_3 + 3 = 29$

$u_5 = 2u_4 + 3 = 61$

2) Ta chưunsg minh bài toán bằng phương pháp quy nạp

* Với n = 1 $\Rightarrow u_1 = 2^{1+1} - 3 = 1 \Rightarrow$ Bài toán đúng với n = 1.

* Giả sử $u_k = 2^{k+1} - 3$, ta chứng minh $u_{k+1} = 2^{k+2} - 3$.

Thật vậy, theo công thức truy hồi ta có:

$u_{k+1} = 2u_k + 3 = 2\left(2^{k+1} - 3\right) + 3 = 2^{k+2} - 3\ (dpcm)$.

**Ví dụ 3:** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi:

$$u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

a) Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số.

b) Tìm số hạng thứ 2019 và số hạng thứ 2020 của dãy số.

**Cách giải:**

a) Với k là số nguyên dương ta có:

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

Khi đó: $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$$u_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right] = \frac{n}{2n+1}$$

Vậy $u_n = \frac{n}{2n+1}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $u_{2019} = \frac{2019}{2.2019+1} = \frac{2019}{4039}$, $u_{2020} = \frac{2020}{2.2020+1} = \frac{2020}{4041}$.

**Ví dụ 4:** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + 2n - 1,\ \forall n \geq 2 \end{cases}$

a) Tìm 5 số hạng đầu của dãy số đã cho.

b) Xác định công thức của số hạng tổng quát của dãy số.

**Cách giải:**

a) Ta lần lượt có:

$u_1 = 1,\ u_2 = u_1 + 3 = 4$

$u_3 = u_2 + 5 = 9$

$u_4 = u_3 + 7 = 16$

$u_5 = u_4 + 9 = 25$

b) Xác định công thức của số hạng tổng quát của dãy số.

Từ 5 số hạng đầu ta thấy $u_n = n^2$.

Ta sữ chứng minh: $u_n = n^2$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ (1)

* Giả sử (1) đúng khi n = k, $k \in \mathbb{N}^*$, tức là $u_k = k^2$.

Ta sẽ chứng minh (1) đúng với n = k + 1, tức là $u_{k+1} = (k+1)^2$.

Thật vậy,

Từ giả thiết ta có: $u_{k+1} = u_k + 2(k+1) - 1 = n^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ $(dpcm)$.

$\Rightarrow (u_n)$ có số hạng tổng quát $u_n = n^2,\ n \in \mathbb{N}^*$.

**Ví dụ 5:** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2},\ \forall n \geq 1 \end{cases}$

a) Tìm 5 số hạng đầu của dãy số đã cho.

b) Xác định công thức của số hạng tổng quát của dãy số.

**Cách giải:**

a) Ta lần lượt có:

$u_1 = 1,\ u_2 = \sqrt{u_1^2 + 2} = \sqrt{3},\ u_3 = \sqrt{u_2^2 + 2} = \sqrt{5}$

$u_4 = \sqrt{u_3^2 + 2} = \sqrt{7},\ u_5 = \sqrt{u_4^2 + 2} = \sqrt{9}$

b) Từ 5 số hạng đầu ta thấy $u_n = \sqrt{2n-1}$.

Ta sẽ chứng minh $u_n = \sqrt{2n-1}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ (1)

* Với n = 1, ta thấy $u_1 = \sqrt{1} = 1$ (đúng)

* Giả sử (1) đúng khi n = k, $k \in \mathbb{N}^*$, tức là $u_k = \sqrt{2k-1}$.

Ta sẽ chứng minh (1) đúng với n = k + 1, tức là $u_{k+1} = \sqrt{2k+1}$.

Thật vậy: Từ giả thiết ta có: $u_{k+1} = \sqrt{u_k^2 + 2} = \sqrt{(2k-1)+2} = \sqrt{2k+1}$ $(dpcm)$.

$\Rightarrow (u_n)$ có số hạng tổng quát $u_n = \sqrt{2n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.