BÀI GIẢNG: DÃY SỐ - TIẾT 1
CHUYÊN ĐỀ: DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN
MÔN: TOÁN 11
GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

MỤC TIÊU

- ✓ *Dãy số*
- ✓ *Dãy số tăng, dãy số giảm*
- ✓ *Dãy số bị chặn*

I. ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ

HĐ1. Nhận biết dãy số vô hạn

Viết năm số chính phương đầu theo thứ tự tăng dần. Từ đó, dự đoán công thức tính số chính phương thứ n. Từ công thức nhận được, ta có quy tắc để viết được dãy gồm tất cả các số chính phương.

Giải:

5 số chính phương đầu theo thứu tự tăng dần: 0, 1, 4, 9, 16

Dự đoán công thức chính phương n là $u_n=(n-1)^2$ với $n\geq 1, n\in N$

Kết luận:

- Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một **dãy số vô hạn** (gọi tắt là dãy số), kí hiệu là $u=u(n)$.

- Ta thường viết u_n thay cho $u(n)$ và kí hiệu dãy số $u=u(n)$ bởi (u_n), do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển $u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n,\ldots$ Số u_1 gọi là **số hạng đầu**, u_n là số hạng thứ n và gọi là **số hạng tổng quát** của dãy số.

Chú ý. Nếu $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=c$ thì (u_n) được gọi là dãy số không đổi.

Ví dụ 1. Xác định số hạng đầu và số hạng tổng quát của mỗi dãy số sau:

a) Dãy số (u_n) các số tự nhiên lẻ: $1,3,5,7\ldots$

b) Dãy số (v_n) các số nguyên dương chia hết cho $5: 5,10,15,20,\ldots$

Giải:

a) Dãy (u_n) có số hạng đầu $u_1=1$ và số hạng tổng quát $u_n=2n-1$.

b) Dãy (v_n) có số hạng đầu $v_1=5$ và số hạng tổng quát $v_n=5n$.

HĐ2: Nhận biết dãy số hữu hạn

a) Liệt kê tất cả các số chính phương nhỏ hơn 50 và sắp xếp chúng theo thứ tự từ bé đến lớn.

b) Viết công thức số hạng u_n của các số tìm được ở câu a) và nêu rõ điều kiện của n.

Giải:

a) 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49

b) $u_n = (n-1)^2$ với $n \geq 1, n \in N$

- Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1;2;3;\ldots,m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một **dãy số hữu hạn**.
- Dạng khai triển của dãy số hữu hạn là $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Số u, gọi là **số hạng đầu**, số u_m gọi là **số hạng cuối**.

Ví dụ 2. Xét dãy số hữu hạn gồm các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 20 , sắp xếp theo thứ tự từ bé đến lớn.

a) Liệt kê tất cả các số hạng của dãy số hữu hạn này.

b) Tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số đó.

Giải:

a) Các số hạng của dãy số là: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

b) Số hạng đầu của dãy số này là 1 và số hạng cuối của dãy số là 19.

Luyện tập 1.

a) Xét dãy số gồm tất cả các số tự nhiên chia cho 5 dư 1 theo thứ tự tăng dần. Xác định số hạng tổng quát của dãy số.

b) Viết dãy số hữu hạn gồm năm số hạng đầu của dãy số trong câu a. Xác định số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số hữu hạn này.

Giải:

a). $6;11;16;21;26\ldots;5n+1,\ldots$

$\Rightarrow u_n = 5n+1 \left(n \geq 1, n \in N^*\right)$

b) 6, 11, 16, 21, 26 $\Rightarrow u_1 = 5, u_5 = 26$

II. CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

HĐ3. Nhận biết các cách cho một dãy số

Xét dãy số (u_n) gồm tất cả các số nguyên dương chia hết cho 5: $5,10,15,20,25,30,\ldots$

a) Viết công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số.

b) Xác định số hạng đầu và viết công thức tính số hạng thứ n theo số hạng thứ $n-1$ của dãy số. Công thức thu được gọi là hệ thức truy hồi.

Giải:

a) SHTQ $u_n = 5n \ (n \geq 1, n \in N)$

b) $u_1 = 5$

$u_2 = u_1 + 5$

$u_3 = u_2 + 5$

...

$u_n = u_{n-1} + 5 (n \geq 2)$

$\Rightarrow u_n - u_{n-1} = 5 = const$ gọi là hệ thức truy hồi.

Kết luận: Một dãy số có thể cho bằng:

- Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);
- Công thức của số hạng tổng quát;
- Phương pháp mô tả;
- Phương pháp truy hồi.

Ví dụ 3. Tim năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của dãy số cho bởi công thức sau:

a) $u_n = 2n$;

b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Giải:

a) Năm số hạng đầu của dãy số là: 2, 4, 6, 8, 10.

Số hạng thứ 100 của dãy số là $u_{100} = 2 \cdot 100 = 200$.

b) Năm số hạng đầu của dẩy sốlà: $-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}$.

Số hạng thứ 100 của dãy số là $u_{100} = \dfrac{(-1)^{100}}{100} = \dfrac{1}{100}$.

Luyện tập 2.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = n!$.

b) Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi $\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 3) \end{cases}$

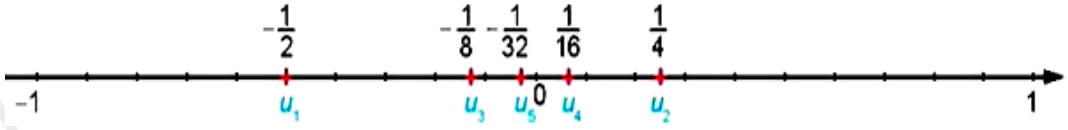
Giải:

a) 5 số hạng đầu của dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = n!$ là $1, 2, 6, 24, 120$.

b) 5 số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) là $1, 1, 2, 3, 5$.

Chú ý.

Để có hình ảnh trực quan về dãy số, ta thường biểu diễn các số hạng của nó trên trục số. Chẳng hạn, xét dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$. Năm số hạng đầu của dãy số này là $u_1 = -\dfrac{1}{2}, u_2 = \dfrac{1}{4}, u_3 = -\dfrac{1}{8}, u_4 = \dfrac{1}{16}, u_5 = -\dfrac{1}{32}$ và được biểu diễn trên trục số như sau:



III. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM VÀ DÃY SỐ BỊ CHẶN

HĐ4. Nhận biết dãy số tăng, dãy số giảm

a) Xét dãy số (u_n) với $u_n = 3n-1$. Tính u_{n+1} và so sánh với u_n.

b) Xét dãy số (v_n) với $v_n = \frac{1}{n^2}$. Tính v_{n+1} và so sánh với v_n.

Giải:

a) $u_n = 3n-1$

$u_{n+1} = 3(n+1)-1 = 3n+2$

Xét hiệu $H = u_{n+1} - u_n = (3n+2)-(3n-1) = 3 > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n \ \forall n \in N^*$

$\Rightarrow (u_n)$ là dãy số tăng.

b) $v_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$

Xét $H = v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-(n+1)^2}{(n+1)^2.n^2} = \frac{-2n-1}{(n+1)^2.n^2} < 0 \ \forall n \in N^*$

$\Rightarrow v_{n+1} < v_n \Rightarrow (v_n)$ là dãy số giảm.

Kết luận:

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n-1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dẫy số giảm nếu ta có $u_{n-1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số không theo quy luật trên thì là dãy số không tăng, không giảm.

Ví dụ 7. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n), với $u_n = -2n+5$.

Giải:

Ta có $u_{n+1} - u_n = [-2(n+1)+5]-(-2n+5) = (-2n+3)+2n-5 = -2 < 0$, tức là $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

Luyện tập 3. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n), với $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Giải:

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n-2}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$

Vậy dãy (u_n) là dãy số giảm.

Ví dụ 4. Xét dãy số gồm tất cả các số nguyên tố theo thứ tự tăng dần. Viết năm số hạng đầu của dãy số đó.

Giải.

Năm số hạng đầu của dãyy số là: 2,3,5,7,11.

Chú ý. Dãy số gồm tất cả các số nguyên tố ở Ví dụ 4 được cho bởi phương pháp mô tả (số hạng thứ n là số nguyên tố thứ n). Cho đến nay người ta vẫn chưa biết có hay không một công thức tính số nguyên tố thứ n theo n (với n bất kì), hoặc là một hệ thức tính số nguyên tố thứ n theo một vài số nguyên tố đứng trước nó.

Ví dụ 5. Cho dãy số xác định bằng hệ thức truy hồi: $u_1=1, u_n=3u_{n-1}+2$ với $n\geq 2$.

Viết ba số hạng đầu của dãy số này.

Giải.

$u_1=1$

$u_2=3.1+2=5$

$u_3=3.5+2=17$

Dự đoán: $u_n=a.q^n+b$

$$q=3, u_n=a.3^n+b \Rightarrow \begin{cases}1=a.3+b\\5=a.9+b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\b=-1\end{cases} \Rightarrow u_n=\frac{2}{3}.3^n-1$$

Ví dụ 6. Giải bài toán ở tình huống mở đầu.

Năm 2020, số dân của một thành phố trực thuộc tỉnh là khoảng 500 nghìn người. Người ta ước tính rằng số dân của thành phố đó sẽ tăng trưởng với tốc độ khoảng 2% mỗi năm. Khi đó số dân P_n (nghìn người) của thành phố đó sau n năm, kể từ năm 2020, được tính bằng công thức $P_n=500(1+0,02)^n$. Hỏi nếu tăng trưởng theo quy luật như vậy thi vào năm 2030, số dân của thành phố đó là khoảng bao nhiêu nghìn người?

Giải:

Ở đây ta có $n=2030-2020=10$.

Vậy số dân của thành phố đó vào năm 2030 sẽ là $P_{10}=500\cdot(1,02)^{10}\approx 609$ (nghìn người).

HĐ5. Nhận biết dãy số bị chặn

Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n+1}{n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) So sánh u_n và 1

b) So sánh u_n và 2

Giải:

a) $u_n-1=\dfrac{n+1}{n}-1=\dfrac{n+1-n}{n}=\dfrac{1}{n}>0\Rightarrow u_n>1\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

b) $u_n-2=\dfrac{n+1}{n}-2=\dfrac{n+1-2n}{n}=\dfrac{1-n}{n}\leq 0\Rightarrow u_n\leq 2\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Ta có $u_n = 1 + \frac{1}{n} > 1 \Rightarrow u_n > 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ta có $n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} + 1 \leq 2 \Rightarrow u_n \leq 2 \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Kết luận:

Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn trên** nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn dưới** nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m \leq u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Ví dụ 8. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n), với $u_n = \frac{n-1}{n}$.

Giải:

Dãy số (u_n) bị chặn trên, vì $u_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) cũng bị chặn dưới, vì $u_n = \frac{n-1}{n} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

Luyện tập 4. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n), với $u_n = 2n - 1$.

Giải:

Vì $n \geq 1 \Rightarrow 2n \geq 2 \Rightarrow 2n - 1 \geq 1 \Rightarrow u_n \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Khi $n \to +\infty \Rightarrow (u_n)$ không bị chặn

Vậy $u_n \geq 1$

Vận dụng. Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 treệu đồng. Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có: $s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25$ với $n \geq 2$.

a) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty.

b) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

Giải:

a) $s_1 = 200, s_2 = 225, s_3 = 250, s_4 = 275, s_5 = 300$

b) Xét hiệu $s_{n+1} - s_n = s_n - s_{n-1} = ... = 25 > 0$ không đổi $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$ nên (s_n) là dãy số tăng

Ý nghĩa: Tạo động lực làm việc và đánh giá hay phản ánh quá trình làm việc tốt, không tốt.