BÀI GIẢNG: DÃY SỐ - TIẾT 2

CHUYÊN ĐỀ: DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

MÔN: TOÁN 11

GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

MỤC TIÊU

- ✓ *Xác định dãy số*
- ✓ *Xác định dãy số tăng, dãy số giảm*
- ✓ *Xác định dãy số bị chặn*

ĐỀ BÀI

2.1. Viết năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của các dãy số (u_n) có số hạng tổng quát cho bởi

a) $u_n = 3n-2$; b) $u_n = 3\cdot 2^n$; c) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

2.2. Dãy số (u_n) cho bởi hệ thức truy hồi: $u_1 = 1, u_n = n\cdot u_{n-1}$ với $n \geq 2$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n.

2.3. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n), biết:

a) $u_n = 2n-1$ b) $u_n = -3n+2$ c) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$

2.4. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên, bị chặn?

a) $u_n = n-1$; b) $u_n = \frac{n+1}{n+2}$ c) $u_n = \sin n$; d) $u_n = (-1)^{n-1}n^2$

2.5. Viết số hạng tổng quát của dãy số tăng gồm tất cả các số nguyên dương mà mỗi số hạng của nó:

a) Đều chia hết cho 3

b) Khi chia cho 4 dư 1.

2.6. Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép.

Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức $A_n = 100\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^n$.

a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.

b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

2.7. Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất 0,8% số tiền còn lại của mỗi tháng.

Gọi $A_n (n \in \mathbb{N})$ là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

a) Tìm lần lượt $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.

b) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n).

HƯỚNG DẪN GIẢI

2.1. Viết năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của các dãy số (u_n) có số hạng tổng quát cho bởi

a) $u_n = 3n - 2$; b) $u_n = 3 \cdot 2^n$; c) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Cách giải:

a) $u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 7, u_4 = 10, u_5 = 13, u_{100} = 298$

b) $u_1 = 6, u_2 = 12, u_3 = 24, u_4 = 48, u_5 = 96, u_{100} = 3,803 \times 10^{30}$

c) $u_1 = 2, u_2 = \frac{9}{4}, u_3 = \frac{64}{27}, u_4 = \frac{625}{256}, u_5 = 2,48832, u_{100} = 2,7148$

2.2. Dãy số (u_n) cho bởi hệ thức truy hồi: $u_1 = 1, u_n = n \cdot u_{n-1}$ với $n \geq 2$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n.

Cách giải:

a) $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 6, u_4 = 24, u_5 = 120$.

b) Ta có: $u_1 = 1 = 1!, u_2 = 2 = 2!, u_3 = 6 = 3!, u_4 = 24 = 4!, u_5 = 120 = 5$!

Vậy công thức số hạng tổng quát là: $u_n = n!$

Mở rộng: chứng minh bằng phương pháp quy nạp $u_n = n!$ (1)

Bước 1: Kiểm tra với n = 1 thì $u_1 = 1$

Bước 2: Giả sử (1) đúng với n = k với $k > 1$. Khi đó $u_k = k!$

Bước 3: Ta cần chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$ tức là $u_{k+1} = (k+1)!$

Thật vậy $u_{k+1} = (k+1).u_k = (k+1).k! = (k+1)!$

Chứng tỏ số hạng tổng quát là: $u_n = n!$

2.3. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n), biết:

a) $u_n = 2n - 1$ b) $u_n = -3n + 2$ c) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$

Cách giải:

a) Xét hiệu $H = u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 1 - (2n-1) = 2 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số $u_n = 2n-1$ là dãy số tăng

b) Xét hiệu $H = u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 2 + 3n - 2 = -3 < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số $u_n = -3n + 2$ là dãy số giảm.

c) Ta có $u_1 = \frac{(-1)^0}{2^1} = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{-1}{4}; u_3 = \frac{1}{8}$ nên dãy số $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$ là dãy số không tăng không giảm.

2.4. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên, bị chặn?

a) $u_n = n-1;$ b) $u_n = \frac{n+1}{n+2}$ c) $u_n = \sin n;$ d) $u_n = (-1)^{n-1} n^2$

Cách giải:

a) Ta có $u_n = n - 1 \geq 0 \left(\forall n \in N^*\right)$ suy ra u_n bị chặn dưới.

b) Ta có: $u_n = \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} < 1; u_n = \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} \geq 0 \left(\forall n \in N^*\right).$

Suy ra u_n bị chặn..

c) $u_n = \sin n$ do đó $-1 \leq u_n \leq 1 \left(\forall n \in N^*\right)$

Suy ra u_n bị chặn

d) Ta có: $u_n = (-1)^{n-1} n^2 > 0$ nếu n là số tự nhiên lẻ

$u_n = (-1)^{n-1} n^2 < 0$ nếu n là số tư nhiên chẵn

2.5. Viết số hạng tổng quát của dãy số tăng gồm tất cả các số nguyên dương mà mỗi số hạng của nó:

a) Đều chia hết cho 3

b) Khi chia cho 4 dư 1.

Cách giải:

a) $u_n = 3n \left(\forall n \in N^*\right)$

b) $u_n = 4n + 1 \left(\forall n \in N^*\right)$

2.6. Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kỉ hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép.

Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức $A_n = 100\left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^n$.

a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.

b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

Cách giải:

a) Số tiền ông An nhận được sau 1 tháng: $A_1 = 100\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^1 = 100,5$ (triệu đồng)

Số tiền ông An nhận được sau 2 tháng: $A_2 = 100\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^2 = 101,0025$ (triệu đồng)

b) Số tiền ông An nhận được sau 1 năm: $A_{12} = 100\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^{12} = 106,1678$ (triệu đồng).

2.7. Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất $0,8\%$ số tiền còn lại của mỗi tháng.

Gọi $A_n (n \in \mathbb{N})$ là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

a) Tìm lần lượt $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.

b) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n).

Cách giải:

a) Ta có:

$A_0 = 100$

$A_1 = 100 + 100 \times 0,008 - 2 = 98,8$

$A_2 = 98,8 + 98,8 \times 0,008 - 2 = 97,59$

$A_3 = 97,59 + 97,59 \times 0,008 - 2 = 96,37$

$A_4 = 96,37 + 96,37 \times 0,008 - 2 = 95,14$

$A_5 = 95,14 + 95,14 \times 0,008 - 2 = 93,90$

$A_6 = 93,90 + 93,90 \times 0,008 - 2 = 92,65$

Vậy sau 6 tháng số tiền chị Hương còn nợ là 92, 65 triệu đồng.

b) Hệ thức truy hồ: $A_n = A_{n-1} + A_{n-1} \times 0.008 - 2 = 1.008A_{n-1} - 2$ (triệu đồng)