# BÀI GIẢNG: GIỚI HẠN HÀM SỐ - TIẾT 1
# CHUYÊN ĐỀ: GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC
# MÔN: TOÁN 11 - CƠ BẢN & NÂNG CAO
# GIÁO VIÊN: NGÔ VĂN TOẢN

## MỤC TIÊU

- ✓ *Tính giới hạn hàm số tại một điểm và giới hạn hàm số tại vô cực.*
- ✓ *Các bài tập giới hạn có chứa tham số.*

## CÂU HỎI KHỞI ĐỘNG

Câu 1. Biết $\lim x_n = 2$. Tính $\lim\left(x_n + 2\right)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. Hoàn thành bảng sau:

| $x$ | 1,9 | 1,99 | 1,999 | 2 | 2,0001 | 2,001 | 2,01 | 2,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f\left(x\right)$ | 3,9 | 3,99 | 3,999 | \|\| | 4,0001 | 4,001 | 4,01 | 4,1 |

Có nhận xét gì về giá trị của $f(x)$ khi $x$ càng gần 2?

$x$ càng gần 2 thì $f(x)$ càng gần 4

$x \to 2$ thì $f(x) \to 4$

$f\left(x\right)$ có giới hạn là 4 khi x dần đến 2.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$

## I. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM VÀ VÍ DỤ

### 1 Giới hạn hàm số tại một điểm

#### a) Định nghĩa

Cho điểm $x_0 \in K$ và hàm số $y = f(x)$ xác định trên $K$ hoặc $K \setminus \{x_0\}$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn hữu hạn là số $L$ khi $x$ dần tới $x_0$ nếu với dãy số $\left(x_n\right)$ bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$ thì $f\left(x_n\right) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

**Ví dụ: Tính $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ bằng định nghĩa,**

**Cách giải**

Gọi $\left(x_n\right)$ là dãy số bất kì thoả mãn $\lim x_n = 2$.

Ta có: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}\Rightarrow f(x_n)=\dfrac{x_n^2-4}{x_n-2}$

Khi đó $\lim f(x_n)=\lim\dfrac{x_n^2-4}{x_n-2}=\lim\dfrac{(x_n-2)(x_n+2)}{x_n-2}=\lim(x_n+2)=2+2=4\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2}(x)=4$

**b) Giới hạn cơ bản**

$\lim\limits_{x\to x_0}c=c$ ( $c$ là hằng số); $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$

**c) Định lí giới hạn hữu hạn của hàm số**

- Cho $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=M$ . Khi đó:

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=L+M$

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=L-M$

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x),g(x)]=L\cdot M$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}(M\neq 0)$

- Nếu $f(x)\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ thì $L\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$ .

**Ví dụ 2.** Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2x-2\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-2}{2x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to -3}(2\sqrt{1-x}+3)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x+3|}{\cos x}$

**Cách giải**

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2x-2\right)=1^2+2\cdot 1-2=1$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-2}{2x+1}=\dfrac{3\cdot 2-2}{2\cdot 2+1}=\dfrac{4}{5}$

c) $\lim\limits_{x\to -3}(2\sqrt{1-x}+3)=2\sqrt{1-(-3)}+3=7$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x+3|}{\cos x}=\dfrac{|0+3|}{\cos 0}=3.$

## 2 Giới hạn một phía

**Định nghĩa**

+) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$.

Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới bên phaii là số $L$ khi $x$ dần tới $x_0$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$ thì $f(x_n)\to L$, ki hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\mathbf{L}$.

+) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$.

Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới bên trái là số $L$ khi $x$ dần tới $x_0$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $a<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$ thì $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$

**Chú ý:**

a) Ta thừa nhận các kết quả sau:

$+\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$.

+ Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ thì không tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

b) Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số ở Mục 1 b,c vẫn đúng khi ta thay $x\to x_0$ bằng $x\to x_0^+$ hoặc $x\to x_0^-$.

**Ví dụ 1:** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-x^2\right)$

**Cách giải:**

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-x^2\right)=1-0^2=1$.

**Ví dụ 2:** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{khi} \quad x<1\\ x & \text{khi} \quad x\geq 1\end{cases}$ Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x);\lim\limits_{x\to 1^-} f(x);\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ nếu có.

**Cách giải:**

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x=1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x^2\right)=-1^2=-1$

Vì $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

## 3 Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

**Định nghĩa:**

+ Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(\alpha;+\infty)$.

Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn hữu hạn là số $L$ khi $x\to+\infty$ nếu với đãy số $(x_n)$ bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ thì $f(x_n)\to L$,

kí hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.

+ Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;a)$.

Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn hữu hạn là số $L$ khi $x\to-\infty$ nếu với dãy số $(x_n)$ bất kì, $x_n<a$ và $x_n\to-\infty$ thì $f(x_n)\to L$,

kí hiệu $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to-\infty$.

**Ví dụ:** Tính: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}$

**Cách giải:**

Gói $(x_n)$ là dãy số bất kì thoả mãn $\lim_n=+\infty$

Khi đó $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}\Rightarrow\quad f(x_n)=\dfrac{2x_n-1}{x+1}$

Ta có: $\lim f(x_n)=\lim\dfrac{2x_n-1}{x_n+1}=\lim\dfrac{x_n\left(2-\dfrac{1}{x_n}\right)}{x_n\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)}=\dfrac{2-0}{1+0}=2$

## 3 Giới hạn vô cực của hàm số

### a) Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$.

+) Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn bên phải là $+\infty$ khi $x\to x_0$ về bên phải nếu với dãy số $(x_n)$ bất kỳ, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$ thì $f(x_n)\to+\infty$, ký hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty$ hay $f(x)\to+\infty$ khi $x\to x_0^+$.

+) Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn bên phải là $-\infty$ khi $x\to x_0$ về bên phải nếu với đãy số $(x_n)$ bất kỳ, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$ thì $f(x_n)\to-\infty$, ký hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$ hay $f(x)\to-\infty$ khi $x\to x_0^+$.

**Chú ý:**

Các giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty;\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty;\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty;\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty;\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ được định nghĩa tương tự như trên .

### b)Ta có các giới hạn thường dùng sau:

- $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{x-a}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$ với $a\in\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ Nếu k là số chẵn.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ Nếu k là số lẻ.

**Quy tắc tính giới hạn vô cực**

**Quy tắc 1.** Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$) thì $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x), g(x)]$ dực tính theo bảng sau:

| $\lim\limits_{x\to x_n} f(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_n} g(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_n}[f(x)g(x)]$ |
|---|---|---|
| $+\infty$ | $L>0$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $L<0$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | | $+\infty$ |
| $\pm\infty$ | $L=0$ | Không xác định |

**Quy tắc 2.**

| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ | Dấu của g(x) | $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ |
|---|---|---|---|
| $L$ | $\pm\infty$ | | 0 |
| $L>0$ | 0 | + | $+\infty$ |
| | | − | $-\infty$ |
| $L<0$ | 0 | + | $-\infty$ |
| | | − | $+\infty$ |

**Ví dụ:** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x^4} = 0$

$\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{x+2}{x-2} = +\infty$ vì

$\lim\limits_{x\to2^+}(x+2) = 4 > 0$

$\lim\limits_{x\to2^+}(x-2) = 0$

$x \to 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x-2 > 0$