BÀI GIẢNG: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC
CHUYÊN ĐỀ: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC
MÔN: TOÁN 11
GIÁO VIÊN: NGUYỄN HOÀNG TÙNG

MỤC TIÊU

- ✓ *Nắm được các công thức lượng giác.*
- ✓ *Vận dụng các công thức vào giải các bài toán.*

I. LÝ THUYẾT

1 Công thức cộng

$\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$

$\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$

$\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b$

$\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\cos a.\sin b$

$\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$

$\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$

VD1. Không dùng máy tính hãy tính $\sin(75^0)$

Cách giải:

$$\sin(75^0)=\sin(45^0+30^0)=\sin 45^0\cos 30^0+\sin 30^0\cos 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

VD2. Chứng minh rằng $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Cách giải:

Ta có: $\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin x.\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\cos x.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sin x-\cos x$

2 Công thức nhân đôi

$\sin 2a=2\sin a\cos a$

$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$

$\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

Chú ý: Ta có công thức hạ bậc

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

VD3. Cho $\cos x = \frac{4}{5}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Giá trị của $\sin 2x$ là bao nhiêu?

Cách giải:

Ta có: $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

Mà $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{3}{5} \\ \sin x = -\frac{3}{5} \end{array}\right.$$

Vì $x \in \left(\frac{-\pi}{2}; 0\right)$ nên $\sin x < 0$. Do đó $\sin x = -\frac{3}{5}$

Vậy $\sin 2x = 2.\left(\frac{-3}{5}\right).\frac{4}{5} = -\frac{24}{25}$

3 Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right]$$

Chứng minh:

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\Rightarrow \cos(a-b) + \cos(a+b) = 2\cos a \cos b$$

VD4. Biết $\cos a = \frac{1}{3}$, $\cos b = \frac{1}{4}$. Hãy tính $\cos(a+b).\cos(a-b)$

Ta có: $\cos(a+b)\cos(a-b) = \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b)$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 2.\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$$

$$\cos 2b = 2\cos^2 b - 1 = 2.\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}$$

Vậy $\cos(a+b)\cos(a-b)=\frac{1}{2}\left(-\frac{7}{9}-\frac{7}{8}\right)=-\frac{119}{144}$

4 Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$$

$$\tan a-\tan b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$$

VD5. Rút gọn biểu thức $B=\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}$

Cách giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}\sin x+\sin 2x+\sin 3x&=(\sin 3x+\sin x)+\sin 2x\\&=2\sin\frac{3x+x}{2}.\cos\frac{3x-x}{2}+\sin 2x\\&=2\sin 2x\cos x+\sin 2x\\&=(2\cos x+1).\sin 2x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x+\cos 2x+\cos 3x&=(\cos 3x+\cos x)+\cos 2x\\&=2\cos 2x.\cos x+\cos 2x\\&=(2\cos x+1).\cos 2x\end{aligned}$$

Vậy $B=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\tan 2x$

ĐỀ BÀI

Câu 1: Cho hai góc $\alpha,\ \beta$ thỏa mãn $\sin\alpha=\frac{5}{13},\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$ và $\cos\beta=\frac{3}{5}\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$. Hãy tính $\cos(\alpha-\beta)$

Câu 2: Cho hai góc a và b với $\tan a=\frac{1}{7}$ và $\tan b=\frac{3}{4}$. Tính $a+b$

Câu 4: Tích số $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$ bằng bao nhiêu?

Câu 5: Cho $A,\ B,\ C$ là các góc của tam giác ABC thì $\cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A$ bằng bao nhiêu?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho hai góc $\alpha,\ \beta$ thỏa mãn $\sin\alpha=\frac{5}{13},\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$ và $\cos\beta=\frac{3}{5}\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$. Hãy tính $\cos(\alpha-\beta)$

Cách giải:

Ta có: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$

Mà $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ nên $\cos\alpha<0$

Do đó $\cos\alpha=\frac{-12}{13}$

Tương tự ta tính được $\sin\beta=\frac{4}{5}$

Ta có: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{12}{13}.\frac{3}{5}+\frac{5}{13}.\frac{4}{5}=-\frac{16}{65}$

Câu 2: Cho hai góc a và b với $\tan a=\frac{1}{7}$ và $\tan b=\frac{3}{4}$. Tính $a+b$

Cách giải:

Ta có: $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}=\frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}.\frac{3}{4}}=1\Rightarrow a+b=\frac{\pi}{4}$

Câu 4: Tích số $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$ bằng bao nhiêu?

Cách giải:

Ta có: $\cos\frac{5\pi}{7}=-\cos\frac{2\pi}{7}$

Khi đó

$$A=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$$
$$=\cos\frac{\pi}{7}\left(-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\cos\frac{4\pi}{7}$$
$$\Rightarrow 8\sin\frac{\pi}{7}.A=-8\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$$
$$=-4\left(2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}\right)\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$$

$$= -4\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$$

$$= -2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = -\sin\frac{8\pi}{7}$$

$$\Rightarrow 8\sin\frac{\pi}{7}A = -\left(-\sin\frac{\pi}{7}\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{8}$$

Câu 5: Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC thì $\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A$ bằng bao nhiêu?

Cách giải:

Ta có: $T = \dfrac{1}{\tan A.\tan B} + \dfrac{1}{\tan B\tan C} + \dfrac{1}{\tan C\tan A} = \dfrac{\tan C + \tan A + \tan B}{\tan A.\tan B.\tan C}$

Lại có:

$$A + B + C = \pi \Leftrightarrow A + B = \pi - C \Rightarrow \tan(A+B) = \tan(\pi - C)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} = -\tan C$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A.\tan B.\tan C$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$$

$$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B + \tan C}{\tan A.\tan B.\tan C} = 1$$