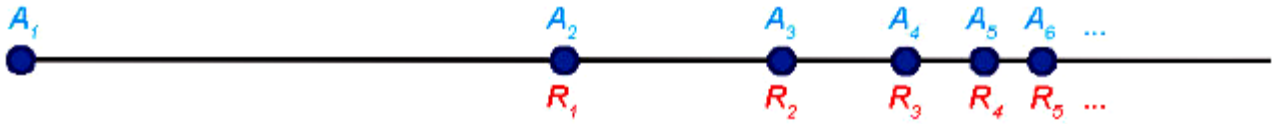
BÀI GIẢNG: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ - TIẾT 1
CHUYÊN ĐỀ: GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC
MÔN: TOÁN 11 (KNTTVCS)
GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

MỤC TIÊU

- ✓ *Giới hạn của dãy số*
- ✓ *Các phép toán giới hạn*

Nghịch lí Zeno. Achilles (A-sin, một nhân vật trong thần thoại Hy Lạp, được mô tả là có thể chạy nhanh như gió) đuổi theo một con rùa trên một đường thẳng. Vị trí xuất phát của Achilles là A_1, cách vị trí xuất phát R_1 của rùa một quãng đường có chiều dài là a.



Zeno lí luận rằng, mặc dù chạy nhanh hơn nhưng Achilles không bao giờ đuổi kịp rùa.

Thật vậy, trước tiên Achilles phải đến được vị trí $A_2 = R_1$ và trong khoảng thời gian này, rùa đã di chuyển đến vị trí R_2, Sau đó, Achilles phải đến được vị trí $A_3 = R_2$, lúc này rùa đã di chuyển đến vị tri $R_3 \ldots$ Cứ như vậy, Achilles không bao giờ đuổi kịp rùa.

Zeno (490 - 429 trước Công nguyên) là một triết gia Hy Lạp, đến từ thành phố Elea (miền nam nước Ý ngày nay). Trong số các nghịch lí của Zeno, nghịch lí Achilles đuổi rùa được coi là đã thúc đẩy sự hình thành khái niệm giới hạn, một công cụ thiết yếu của toán học, được sử dụng để nghiên cứu các quá trình liên quan đến sự vô hạn.

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

HĐ1: Nhận biết dãy số có giới hạn là 0

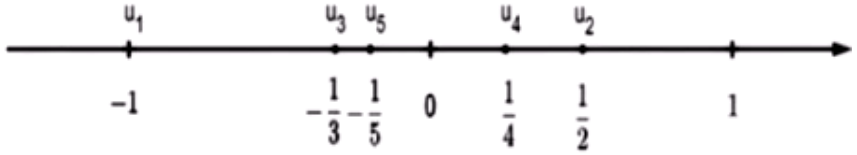
Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

a) Biểu diễn năm số hạng đầu của dãy số này trên trục số.

b) Bắt đầu từ số hạng nào của dãy, khoảng cách từ u_n đến 0 nhỏ hơn 0,01 ?

Cách giải:

a) $u_1 = -1; u_2 = \dfrac{1}{2}; u_3 = -\dfrac{1}{3}; u_4 = \dfrac{1}{4}; u_5 = -\dfrac{1}{5}$



b) Ta có $u_{100} = 0.01$ suy ra bắt đầu từ số hạng thứ 101 khoảng cách từ số hạng đến 0 nhỏ hơn 0.01

Kết luận:

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Ví dụ 1. Xét dãy số $u_n = \frac{1}{n^2}$. Giải thích vì sao dãy số này có giới hạn là 0.

Cách giải:

Dãy số này có giới hạn là 0 , bởi vì $|u_n| = \frac{1}{n^2}$ có thể nhỏ hon một số dương bé tuỳ ý khi n đủ lớn. Chẳng hạn, để $|u_n| < 0,0001$ tức là $\frac{1}{n^2} < 10^{-4}$, ta cần $n^2 > 10000$ hay $n > 100$. Như vậy, các số hạng của dãy kể từ số hạng thứ 101 đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 0,0001.

Chú ý. Từ định nghĩa dãy số có giới hạn 0 , ta có các kết quả sau:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ với k là một số nguyên dương;

- $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q|<1$;

- Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi $n \ge 1$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Luyện tập 1. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} = 0$

Cách giải:

Cách 1:

Chọn n = 10 ta có $u_{10} = \frac{(-1)}{3^{10}} = -1,69 \cdot 10^{-5} \to 0$ nên ta chọn $\varepsilon = 1,69.10^{-5}$

Dãy số này có giới hạn là 0 , bởi vì $|u_n| = \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý khi n đủ lớn

Chẳng hạn, để $|u_n| < 1.69 \times 10^{-5}$ ta cần $n > 10$. Như vậy, các số hạng của dãy kể từ số hạng thứ 11 đều có giá trị nhỏ hơn 1.69×10^{-5}

Cách 2:

Xét $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} \Rightarrow |u_n| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\right| \le \frac{1}{3^n}$

Mà $\frac{1}{3^n} \to 0$ khi $n \to +\infty$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} = 0$

HĐ2. Nhận biết dãy số có giới hạn hữu hạn

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$. Xét dãy số (v_n) xác đạnh bởi $v_n = u_n - 1$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Cách giải:

$v_n = u_n - 1 = \frac{n+(-1)^n}{n} - 1 = \frac{n+(-1)^n - n}{n} = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$ khi $n \to +\infty$

Do vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Kết luận:

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0$, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ hay $u_n \to$ a khi $n \to +\infty$.

Ví dụ 2. Xét dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Cách giải:

Ta có $u_n - 2 = \frac{2n+1}{n} - 2 = \frac{(2n+1)-2n}{n} = \frac{1}{n} \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Do vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Chú ý. Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$.

Luyện tập 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3\cdot 2^n - 1}{2^n}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Cách giải:

$u_n - 3 = \frac{3\times 2^n - 1}{2^n} - 3 = \frac{3\times 2^n - 1 - 3\times 2^n}{2^n} = \frac{-1}{2^n} \to 0$ khi $n \to +\infty$

Do vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

Vận dụng 1. Một quả bóng cao su được thả từ độ cao 5m xuống một mặt sàn. Sau mỗi lần chạm sàn, quả bóng nảy lên độ cao bằng $\frac{2}{3}$ độ cao trước đó. Giả sử rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt sàn và quá trinh này tiếp diễn vô hạn lần. Giả sử u_n là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng sau lần nảy lên thứ n. Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0.

Cách giải:

Độ cao của quả bóng sau mỗi lần chạm sàn tạo thành cấp số nhân có số hạng tổng quát là: $u_n = 5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Ta có: $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ khi $n \to +\infty$ suy ra $5\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ khi $n \to +\infty$

Do vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

II. ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

HĐ3. Hình thành quy tắc tính giới hạn

Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) với $u_n = 2 + \frac{1}{n}, v_n = 3 - \frac{2}{n}$.

Tính và so sánh: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n)$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Cách giải:

Ta có: $u_n + v_n = 2 + \frac{1}{n} + 3 - \frac{2}{n} = 5 - \frac{1}{n}$

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = 5$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2, \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Kết luận:

a) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$ thì

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = a + b$; $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = a - b$;

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n \cdot v_n) = a.b$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ (khi $b \neq 0$).

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

Ví dụ 3. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+n+1}{2n^2-1}$

Để tính giới hạn của dãy số dạng phân thức, ta chia cả từ thức và mẫu thức cho luỹ thừa cao nhất của n, rồi áp dụng các quy tắc tính giới hạn.

Cách giải:

Áp dụng các quy tắc tính giới hạn, ta được

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n+1}{2n^2-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}$$

Mở rộng: Có 4 dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \frac{0}{0}, 0.\infty$

Tính nhanh $\lim\frac{u_n}{v_n}$

Nếu bậc u = v thì $L=\frac{a}{a'}$

Nếu bậc $u<v\Rightarrow L=0$

Nếu $u>v\Rightarrow L=\left[\begin{array}{l}+\infty\ khi\ a.a'>0\\-\infty\ khi\ a.a'<0\end{array}\right.$

Ví dụ: Tính giới hạn của

$\lim\frac{2n+1}{3n^3+n+3}=0$

$\lim\frac{2n^4-n^3+1}{1+5n^4}=\frac{2}{5}$

$\lim\frac{-2n+1}{n^2+n+3}=-\infty$

Luyện tập 3. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+1}$

Cách giải:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$$

Cách 2: Sử dụng casio

Nhập hàm $\frac{\sqrt{2X^2+1}}{X+1}$ chọn $CALX$ $X=10^6$ hoặc $X=10^9$