BÀI GIẢNG: DÃY SỐ
CHUYÊN ĐỀ: DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN
MÔN: TOÁN 11 (KNTTVCS)
GIÁO VIÊN: NGUYỄN HOÀNG TÙNG

MỤC TIÊU

- ✓ *Định nghĩa về dãy số*
- ✓ *Các cách cho một dãy số*
- ✓ *Dãy số tăng, dãy số giảm, dãy số bị chặn*

Bài toán mở đầu:

Năm 2020, số dân của một thành phố trực thuộc tỉnh là khoảng 500 nghìn người. Người ta ước tính rằng số dân của thành phố đó sẽ tăng trưởng với tốc độ khoảng 2% mỗi năm. Khi đó số dân P_n (nghìn người) của thành phố sau n năm, kể từ năm 2020 , được tính bằng công thức $P_n = 500(1+0,02)^n$. Hỏi nếu tăng trưởng theo quy luật như vậy thì vào năm 2030 , số dân của thành phố đó là khoảng bao nhiêu nghìn người?

1. ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ

HĐ 1: Nhận biết dãy số vô hạn

Viết năm số chính phương đầu theo thứ tự tăng dần. Từ đó, dự đoán công thức tính số chính phương thứ n.

Cách giải:

$u_1 = 0^2 = 0$

$u_2 = 1^2 = 1$

$u_3 = 2^2 = 4$

$u_4 = 3^2 = 9$

$u_5 = 4^2 = 16$

..

$u_n = (n-1)^2$

+ Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số), kí hiệu là $u = u(n)$.

+ Ta thường viết u_n thay cho $u(n)$ và ki hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n), do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots\ldots$ Số u_1 được gọi là số hạng đầu, u_n là số hạng thứ n và được gọi là số hạng tổng quát của dãy số.

Chú ý. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = c$ thì (u_n) được gọi là dãy số không đổi.

Ví dụ 1. Xác định số hạng đầu và số hạng tổng quát của dãy số sau:

a) Dãy số (u_n) các số tự nhiên lẻ: $1,3,5,7\ldots$

b) Dãy số (v_n) các số nguyên dương chia hết cho 5 : $5,10,15,20,\ldots$

Cách giải:

$u_1 = 1 = 2\times 1 - 1$

$u_2 = 3 = 2\times 2 - 1$

$u_3 = 5 = 2\times 3 - 1$

$u_4 = 7 = 2\times 4 - 1$

Dự đoán $u_n = 2\times n - 1$

b) $u_1 = 5$

$u_2 = 10 = 5\times 2$

$u_3 = 15 = 5\times 3$

$\Rightarrow u_n = 5.n$

HĐ 2. Nhận biết dãy số hữu hạn

a) Liệt kê tất cả các số chính phương nhỏ hơn 50 và sắp xếp chúng theo thứ tự từ bé đến lớn.

b)Viết công thức số hạng u_n của các số tìm được ở câu a) và nêu rõ điều kiện của n.

Cách giải:

0	1	4	9	16	25	36	49
‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8

$u_n = (n-1)^2 < 50 \Rightarrow (n-1)^2 \le 49 \Rightarrow n-1 \le 7 \Rightarrow n \le 8$

Vậy $n \le 8, n \in \mathbb{N}^*$

+Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1;2;3;\ldots,m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.

+Dạng khai triển của dãy số hữu hạn là $u_1, u_2, u_3, \ldots..., u_m$. Số u_1 gọi là số hạng đầu, u_m gọi là số hạng cuối

Ví dụ 2. Xét dãy số hữu hạn gồm các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 20 , sắp xếp theo thứ tự từ bé đến lớn.

a) Liệt kê tất cả các số hạng của dãy số hữu hạn này.

b) Tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số đó.

Cách giải:

a) Dãy số 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19.

b) Số hạng đầu là 1, số hạng cuối là 19

Luyện tập 1.

a) Xét dãy số gồm tất cả các số tự nhiên chia cho 5 dư 1 theo thứ tự tăng dần. Xác định số hạng tổng quát của dãy số.

b) Viết dãy số gồm năm số hạng đầu của dãy số trong câu a. Xác định số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số hữu hạn này.

Cách giải:

a) Dãy số gồm 1,6,11,16,21

$u_1 = 1$

$u_2 = 6 = 5.1 + 1$

$u_3 = 11 = 5.2 + 1$

$u_4 = 16 = 5.3 + 1$

$\Rightarrow u_n = 5(n-1) + 1$

b) Số hạng đầu là 1, số hạng cuối là 21.

2. CÁC CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

HĐ 3. Nhận biết các cách cho một dãy số

Xét dãy số (u_n) gồm tất cả các số nguyên dương chia hết cho 5 : $5,10,15,20,25,\ldots$

a) Viết công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số

b) Xác định số hạng đầu và viết công thức tính số hạng thứ n theo số hạng thứ n-1 của dãy số.

Cách giải:

a) Công thức tổng quát $u_n = 5.n$

b) $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_n = u_{n-1} + 5 \end{cases}, n \geq 2$

Kết luận:

Một dãy số có thể cho bằng:

+Liệt kê các số hạng (chỉ dung cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);

+Công thức của số hạng tổng quát;

+Phương pháp mô tả;

+Phương pháp truy hồi.

Ví dụ 3. Tìm năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của dãy số cho bởi công thức sau:

a) $u_n = 2n$

b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

Cách giải:

a) Dãy số liệt kê $2,4,6,8,10,\ldots,200$

b) Dãy số $-1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}, \ldots, \dfrac{1}{100}$

Ví dụ 4. Xét dãy số gồm tất cả số nguyên tố theo thứ tự tăng dần. Viết năm số hạng đầu của dãy số đó.

Cách giải:

Liệt kê: 2,3,5,7,11

Chú ý. Dãy số gồm tất cả các số nguyên tố ở Ví dụ 4 được cho bởi phương pháp mô tả (số hạng thứ n là số nguyên tố thứ n). Cho đến nay người ta vẫn chưa biết có hay không một công thức tính số nguyên tố thứ n theo một vài số nguyên tố đứng trước nó.

Ví dụ 5. Cho dãy số xác định bằng hệ thức truy hồi: $u_1 = 1, u_n = 3u_{n-1} + 2$ với $n \geq 2$

Viết bốn số hạng đầu của dãy số này.

Cách giải:

$u_2 = 3 \cdot u_1 + 2 = 3.1 + 2 = 5$

$u_3 = 3.u_2 + 2 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$

$u_4 = 3.u_3 + 2 = 3.17 + 2 = 53$

Ví dụ 6. Giải bài toán ở tình huống mở đầu.

Cách giải:

Từ 2030 – 2020 = 10 năm nên $n = 10$

Vậy $P_{10} = 500(1,02)^{10}$

Luyện tập 2.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = \text{n}\ !$

b) Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi sau

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 3) \end{cases}$$

Cách giải:

$u_1 = 1! = 1$

$u_2 = 2! = 2.1 = 2$

$u_3 = 3! = 3.2.1 = 6$

$u_4 = 4! = 24$

$u_5 = 5! = 120$

b) Dãy số 1,1,2,3,5

3. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM, DÃY SỐ BỊ CHẶN

HĐ 4. Nhận biết dãy số tăng, dãy số giảm

a. Xét dãy số (u_n) với $u_n = 3n - 1$. Tính u_{n+1} và so sánh với u_n

b. Xét dãy số (v_n) với $v_n = \frac{1}{n^2}$. Tính v_{n+1} và so sánh với v_n

Cách giải:

a) $u_{n+1} = 3(n + 1 - 1) = 3n + 2$

Ta có $u_{n+1} - u_n = (3n + 2) - (3n - 1) = 3$ tức là $u_{n+1} > u_n, \forall n \in$

b) $v_n = \frac{1}{n^2}, v_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - (n+1)^2}{(n+1)^2 \cdot n^2} < 0$

Vậy $v_{n+1} < v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Kết luận:

+ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1} > u_n$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

+ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 7. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n), với $u_n = -2n + 5$

Cách giải:

$u_n = -2 \cdot (n+1) + 5 = -2n + 3 < -2n + 5 = u_n$

Vậy $u_n > u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) là dãy số giảm.

Luyện tập 3. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n), với $(u_n) = \frac{1}{n+1}$

Cách giải:

Dãy số (u_n) là dãy giảm vì $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$

HĐ 5. Nhận biết dãy số bị chặn

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

a. So sánh u_n và 1

b. So sánh u_n và 2

Cách giải:

$u_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow 1 < u_n \le 2$

Kết luận:

+ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \le M$ vớii $\forall n \in \mathbb{N}^*$

+ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \ge m$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$

+ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m \le u_n \le M$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Ví dụ 8. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n), với $u_n = \frac{n-1}{n}$

Cách giải:

$u_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow u_n < 1$

Vậy (u_n) là dãy số bị chặn

Luyện tập 4. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n), với $u_n = 2n - 1$

Cách giải:

Dãy số $u_n = 2n - 1$ là dãy tăng nên không bị chặn.

Vận dụng. Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tang thêm 25 triệu đồng. Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty. Khi đó ta có: $s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25$ với $n \geq 2$.

a) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty.

b) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

Cách giải:

a) $S_1 = 200$

$S_2 = S_1 + 25 = 225$
$S_3 = S_2 + 25 = 250$
$S_4 = S_3 + 25 = 275$
$S_5 = S_4 + 25 = 300$

b) $S_n - S_{n-1} = 25 > 0$ nên (s_n) là dãy số tăng.

TỔNG KẾT BÀI HỌC

- Định nghĩa dãy số, các cách cho dãy số.
- Biết cách tìm số hạng tổng quát của dãy số, tìm số hạng bất kì của dãy từ công thức số hạng tổng quát.
- Biết cách kiểm tra dãy tăng giảm
- Biết cách kiểm tra dãy bị chặn.