BÀI GIẢNG: PHÉP TÍNH LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC (TIẾT 2)

CHUYÊN ĐỀ: HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

MÔN: TOÁN 11 CƠ BẢN & NÂNG CAO

GIÁO VIÊN: NGÔ VĂN TOẢN

MỤC TIÊU

✓ *Bài tập về phép tính luỹ thừa:*
Dạng 1. Tính toán giá trị biểu thức luỹ thừa.
Dạng 2. Rút gọn biểu thức.
Dạng 3. So sánh luỹ thừa.
Dạng 4. Điều kiện cho một biểu thức chứa luỹ thừa.
Dạng 5. Ứng dụng.

1 DẠNG 1. TÍNH TOÁN GIÁ TRỊ BIỂU THỨC LUỸ THỪA

Sử dụng các công thức biến đổi

- Với mọi $a>0, b>0$ ta có:

+) $a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}; \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\alpha-\beta}; \left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=a^{\alpha.\beta};$

+) $(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}\cdot b^{\alpha}; \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}=\frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$

+) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}; \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{k}}}=\sqrt[mn]{a}=a^{\frac{k}{m\cdot n}}$

ĐỀ BÀI

Câu 1. Tính giá trị các biểu thức

a) $\left(\frac{1}{256}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{3}{4}}$

b) $\left(4^{3+\sqrt{3}}-4^{\sqrt{3}-1}\right)\cdot 2^{-2\sqrt{3}}$

c) $\left(5^{-\frac{2}{3}}\right)^{-3}+\left((0,2)^{\frac{3}{5}}\right)^{-5}$

d) $81^{-0.75}+\left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}}-\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$

e) $\sqrt{\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt[4]{\sqrt{5}}:\sqrt{\sqrt[5]{5}}\right)^{10}}$

Câu 2. Cho a, b là 2 số thực khác 0. Biết $\left(\frac{1}{125}\right)^{a^2+4ab} = (\sqrt[3]{625})^{3a^2-10ab}$. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$.

Câu 3. Tính $P = (2017)!\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \ldots \left(1+\frac{1}{2017}\right)^{2017}$

Câu 4. Cho biểu thức $f(x) = \frac{1}{2018^x + \sqrt{2018}}$

a) Chứng minh rằng $f(x) + f(1-x) = \frac{1}{\sqrt{2018}}$

b) Tính tổng sau $S = \sqrt{2018}[f(-2017) + f(-2016) + \ldots + f(0) + f(1) + \ldots + f(2018)]$

Câu 5. Cho biểu thức $f(x) = 5^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$, (với $x > 0$).

a) Chứng minh rằng: $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}} = 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$

b) Tính $f(1)\cdot f(2)\ldots f(2020)$

Câu 6. Biết rằng $3^{\alpha} + 3^{-\alpha} = 3$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $3^{\frac{\alpha}{2}} + 3^{\frac{-\alpha}{2}}$;

b) $3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha}$.

2 DẠNG 2. RÚT GỌN BIỂU THỨC

Câu 7. Rút gọn biểu thức sau:

a) $\frac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} (a > 0, a \neq 1)$

b) $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}{ab^2} (a > 0, b > 0)$

Câu 8: Cho số thực dương a. Hãy rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(a) = \frac{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a^{-2}} - \sqrt[3]{a}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$, với $a > 0, a \neq 1$. Chứng minh rằng

$f\left(2019^{2020}\right) = -1 - 2019^{1010}$.

Câu 10. Cho các số thực dương a và b. Hãy rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}-\sqrt[3]{ab}$

Câu 11. Rút gọn biểu thức $P=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x}}}}$ vợ n dấu căn và x là số thực dương.

3 DẠNG 3. SO SÁNH LUỸ THỪA

Phương pháp

i) So sánh lũy thừa cùng cơ số

$a>1:a^{\alpha}>a^{\beta}\Leftrightarrow\alpha>\beta;0<a<1:a^{\alpha}>a^{\beta}\Leftrightarrow\alpha<\beta$

ii) So sánh lũy thừa cùng cơ số

$0<a<b$ ta có:

$a^{m}<b^{m}\Leftrightarrow m>0;$

$a^{m}>b^{m}\Leftrightarrow m<0$

Câu 12. So sánh các số:

a. $(\sqrt{2}-1)^{2019}$ và $(\sqrt{2}-1)^{2020}$

b. π^{1015} và $3{,}14^{1015}$.

Câu 13. So sánh các số:

a. 2^{1200} và 3^{900}

b. $(\sqrt{7})^{85}$ và 3^{-150}

Câu 14. Có thể kết luận gì về số a nếu:

a) $(2-a)^{\frac{3}{4}}>(2-a)^{2}$

b) $(1-a)^{-\frac{1}{3}}>(1-a)^{-\frac{1}{2}}$

4 DẠNG 4: ĐIỀU KIỆN CHO CÁC BIỂU THƯC CHỨA LUỸ THỪA

Phương pháp: Cho biểu thức $[P(x)]^{\alpha}$, khi đó:

+) $\alpha\in\mathbb{N}^{*}=\{1;2;3;4;\ldots\}\rightarrow[P(x)]^{\alpha}$ xác định khi $P(x)$ xác định

+) $\alpha\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}^{*}=\{0;-1;-2;\ldots\}\rightarrow[P(x)]^{\alpha}$ xác định khi $P(x)\neq0$

+) $\alpha\notin\mathbb{Z}\rightarrow[P(x)]^{\alpha}$ xác định khi $P(x)>0$

Câu 15. Tìm x đả biểu thức

a) $P(x)=\left(-x^2+6x-8\right)^{\sqrt{2}}$ có nghĩa.

b) $P(x)=\left(9x^2-1\right)^{\frac{1}{5}}$ có nghĩa.

c) $P(x)=\left(x^2-5x+6\right)^{-2019}$ có nghĩa.

d) $P(x)=\left(\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}\right)^3$ có nghĩa.

Câu 16. Tìm các giá trị của tham số m để biểu thức sau xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$

a) $P(x)=\left(x^2-2x+m-3\right)^{-2}$

b) $P(x)=\left(x^2-2x+m-3\right)^{e}$

5 DẠNG 5. ỨNG DỤNG

Câu 17. Một chất phóng xạ có chu kì bán rã là 25 năm, tức là cứ sau 25 năm, khối lượng của chất phóng xạ đó giảm đi một nửa. Giả sử lúc đầu có $10\,\text{g}$ chất phóng xạ đó. Viết công thức tính khối lượng của chất đó còn lại sau t năm và tính khối lượng của chất đó còn lại sau 120 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn theo đơn vị gam).

Câu 18. Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P=d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU .

(1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU khoảng 93.000 .000 dặm)

(Nguồn: R.l. Charles et al., Algebra 2, Peason).

Hỏi Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)? Biết khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là 1,52 AU.

Câu 19. Cường độ ánh sáng tại độ sâu $h(\text{m})$ dưới một mặt hồ được tính bằng công thức $I_h=I_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{h}{4}}$,

trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ đó.

a) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 1m bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt hồ?

b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 3m gấp bao nhiêu lần cường độ ánh sáng tại độ sâu 6 m?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Tính giá trị các biểu thức

a) $\left(\frac{1}{256}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{3}{4}}$

b) $\left(4^{3+\sqrt{3}}-4^{\sqrt{3}-1}\right)\cdot 2^{-2\sqrt{3}}$

c) $\left(5^{-\frac{2}{3}}\right)^{-3}+\left((0,2)^{\frac{3}{5}}\right)^{-5}$

d) $81^{-0.75}+\left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}}-\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$

e) $\sqrt{\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt[4]{\sqrt{5}:\sqrt[5]{\sqrt{5}}}\right)^{10}}$

f) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}\cdot\sqrt[7]{\frac{2}{5}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{5}}}}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)$

Cách giải:

a) $\left(\frac{1}{2^8}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{3^3}\right)^{-\frac{2}{4}}=\left(2^{-8}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(3^{-3}\right)^{-\frac{3}{4}}=2^6+3^{\frac{9}{4}}=64+3^{\frac{9}{4}}=64+9.3^{\frac{1}{4}}=64+9\sqrt[4]{3}$

b) $\left(4^{3+\sqrt{3}}-4^{\sqrt{3}-1}\right)\cdot 2^{-2\sqrt{3}}=\left[\left(2^2\right)^{3+\sqrt{3}}-\left(2^2\right)^{\sqrt{3}-1}\right]\cdot 2^{-2\sqrt{3}}=\left[2^{6+2\sqrt{3}}-2^{2\sqrt{3}-2}\right]\cdot 2^{-2\sqrt{3}}=2^6-2^{-2}=64-\frac{1}{4}=\frac{255}{4}$

c) $\left(5^{-\frac{2}{3}}\right)^{-3}+\left((0,2)^{\frac{3}{5}}\right)^{-5}=5^2+\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=5^2+\left(5^{-1}\right)^{-3}=5^2+5^3=25+125=150$

d) $81^{-0.75}+\left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}}-\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}=\left(3^4\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{5^4}\right)^{-\frac{1}{4}}-\left(\frac{1}{2^5}\right)^{-\frac{3}{5}}$

$=3^{-3}+\left(5^{-4}\right)^{-\frac{1}{4}}-\left(2^{-5}\right)^{-\frac{3}{5}}=\frac{1}{3^3}+5-2^3=\frac{1}{27}+5-8=-\frac{80}{27}$

e) $\sqrt{\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt[4]{\sqrt{5}:\sqrt[5]{\sqrt{5}}}\right)^{10}}=\sqrt{5^{\frac{1}{2}}\cdot\left(5^{\frac{1}{8}}:5^{\frac{1}{10}}\right)^{10}}=\sqrt{5^{\frac{1}{2}}\cdot\left(5^{\frac{1}{40}}\right)^{10}}=\sqrt{5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}}=\sqrt{5^{\frac{3}{4}}}=5^{\frac{3}{4}:2}=5^{\frac{3}{8}}=\sqrt[8]{5^3}$

f) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}\cdot\sqrt[7]{\frac{2}{5}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{5}}}}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{7\cdot 3}}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3\cdot 7\cdot 3}}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{21}+\frac{1}{63}+1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{88}{63}}$

Câu 2. Cho a, b là 2 số thực khác 0. Biết $\left(\frac{1}{125}\right)^{a^2+4ab} = (\sqrt[3]{625})^{3a^2-10ab}$. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$.

Cách giải:

$\left(\frac{1}{125}\right)^{a^2+4ab} = (\sqrt[3]{625})^{3a^2-10ab}$.

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{5^3}\right)^{a^2+4ab} = \left(5^{\frac{4}{3}}\right)^{3a^2-10ab}$

$\Leftrightarrow \left(5^{-3}\right)^{a^2+4ab} = 5^{4a^2-\frac{40}{3}ab}$

$\Leftrightarrow 15^{-3a^2-12ab} = 5^{4a^2-\frac{40}{3}ab.}$

$\Leftrightarrow -3a^2-12ab = 4a^2-\frac{40}{3}ab. \Leftrightarrow -7a^2+\frac{4}{3}ab = 0 \Leftrightarrow 1-7a+\frac{4}{3}b = 0$

$\Leftrightarrow -7a = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = -\frac{4}{3}\cdot(-7) = \frac{4}{21}$

Câu 3. Tính $P = (2017)!\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \ldots \left(1+\frac{1}{2017}\right)^{2017}$

Cách giải:

$P = (2017!)\cdot 2^1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{2018}{2017}\right)^{2017}$

$= (2017!)\cdot 2 \cdot \frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{4^3}{3^3}\cdot\frac{5^4}{4^4}\cdots\cdots\frac{2018^{2017}}{2017^{2417}}$

$= (2017!)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{2017}\right)2018^{2017} = 2017!\frac{1}{2017!}\cdot 2018^{2017} = 2018^{2017}$.

Câu 4. Cho biểu thức $f(x) = \frac{1}{2018^x+\sqrt{2018}}$

a) Chứng minh rằng $f(x)+f(1-x) = \frac{1}{\sqrt{2018}}$

b) Tính tổng sau $S = \sqrt{2018}[f(-2017)+f(-2016)+\ldots+f(0)+f(1)+\ldots+f(2018)]$

Cách giải:

a) $f(1-x) = \frac{1}{2018^{1-x}+\sqrt{2018}} = \frac{1}{\frac{2018}{2018^x}+\sqrt{2018}} = \frac{2018^x}{2018+\sqrt{2018}\cdot 2018^x}$

$\Rightarrow f(x)+f(1-x) = \frac{1}{2018^x+\sqrt{2018}} + \frac{2018^x}{2018+\sqrt{2018}\cdot 2018^x}$

$$= \frac{1}{2018^x + \sqrt{2018}} + \frac{2018^x}{\sqrt{2018}\left(\sqrt{2018} + 2018^x\right)} = \frac{\sqrt{2018} + 2018^x}{\sqrt{2018}\left(\sqrt{2018} + 2018^x\right)} = \frac{1}{\sqrt{2018}}$$

b) Sử dụng tính chất ở ý a) ta có:

$$f(-2017) + f(2018) = \frac{1}{\sqrt{2018}}$$

$$f(-2016) + f(2017) = \frac{1}{\sqrt{2018}}$$

$$f(0) + f(1) = \frac{1}{\sqrt{2018}}$$

Câu 5. Cho biểu thức $f(x) = 5^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$, (với $x > 0$).

a) Chứng minh rằng: $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}} = 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$

b) Tính $f(1)\cdot f(2)\ldots f(2020)$

Cách giải:

a) $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}} = 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$

Với x >1 ta đặt $A = 1+\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{x}$ $(A>0)$

$$\Rightarrow A^2 = \left(1+\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{x}\right)^2 = 1+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x}-\frac{2}{(x-1)x}$$

$$= 1+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x} = 1+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{1+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}}$$

Vậy $\sqrt{1+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}} = 1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$ (đpcm)

b) $S = 5^{\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)}.5^{\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}.5^{\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}\ldots 5^{\left(1+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2020}\right)}5^{\left(1+\frac{1}{2000}-\frac{1}{2021}\right)} = 5^{1.2020+1-\frac{1}{201}} = 5^{2021-\frac{1}{2021}}$.

Câu 6. Biết rằng $3^{\alpha} + 3^{-\alpha} = 3$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $3^{\frac{\alpha}{2}} + 3^{\frac{-\alpha}{2}}$;

b) $3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha}$.

Cách giải:

a) $S_1 = 3^{\frac{\alpha}{2}} + 3^{-\frac{\alpha}{2}}, (S_1 > 0)$

$\Leftrightarrow S_1^2 = \left(3^{\frac{\alpha}{2}} + 3^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = 3^{\alpha} + 3^{-\alpha} + 2 \cdot 3^{\frac{\alpha}{2}} \cdot 3^{-\frac{\alpha}{2}} = 3 + 2 \cdot 1 = 5$

$\Leftrightarrow S_1 = \sqrt{5}$

b) $3^{\alpha} + 3^{-\alpha} = 3 \Leftrightarrow \left(3^{\alpha} + 3^{-\alpha}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow 3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha} + 2 \cdot 3^{\alpha} \cdot 3^{-\alpha} = 9$

$\Leftrightarrow S_2 + 2.1 = 9 \Rightarrow S_2 = 7$

2 DẠNG 2. RÚT GỌN BIỂU THỨC

Câu 7. Rút gọn biểu thức sau:

a) $\dfrac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} (a > 0, a \neq 1)$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}{ab^2} (a > 0, b > 0)$

Cách giải:

a) $\dfrac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^2 - 1\right)}{a^{\frac{1}{3}}(a-1)} = \dfrac{a^2 - 1}{a - 1} = \dfrac{(a-1)(a+1)}{a-1} = a + 1$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}{ab^2} = \dfrac{a^{\frac{12}{2\cdot 3}} \cdot b^{\frac{6}{2\cdot 3}}}{ab^2} = \dfrac{a^2 \cdot b}{ab^2} = \dfrac{a}{b}$

Câu 8. Cho số thực dương a. Hãy rút gọn biểu thức $P = \dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)}$.

Cách giải:

$P = \dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)} = \dfrac{a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}} = \dfrac{a + a^2}{a + 1} = \dfrac{a(a+1)}{a+1} = a$.

Câu 9. Cho hàm số $f(a)=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a^{-2}}-\sqrt[3]{a}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^{3}}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$, vơi $a>0, a\neq 1$. Chứng minh rằng $f\left(2019^{2020}\right)=-1-2019^{1010}$.

Cách giải:

$$f(a)=\frac{a^{\frac{2}{3}}\cdot\left(a^{-\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{1}{3}}\right)}=\frac{1-a}{a^{\frac{1}{2}}-1}$$

$$=\frac{1-a}{\sqrt{a}-1}=-\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}=-\frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}-1}=-(\sqrt{a}+1)$$

$$\Rightarrow f\left(2019^{2020}\right)=-\left(\sqrt{2019^{2020}}+1\right)=-1-2019^{\frac{2020}{2}}=-1-2019 \text{ (đpcm).}$$

Câu 10. Cho các số thực dương a và b. Hãy rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}-\sqrt[3]{ab}$

Cách giải:

$$P=\frac{a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}-(ab)^{\frac{1}{3}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}\right)}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{b}}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}=0$$

Câu 11. Rút gọn biểu thức $P=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x}}}}$ vợ n dấu căn và x là số thực dương.

Cách giải:

$$P=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\ldots x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\cdot x^{\left(\frac{1}{2}\right)^3}\cdots x^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=x^{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}}=x^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

3 DẠNG 3. SO SÁNH LUỸ THỪA

Câu 12. So sánh các số:

a. $(\sqrt{2}-1)^{2019}$ và $(\sqrt{2}-1)^{2020}$

b. π^{1015} và $3{,}14^{1015}$.

Cách giải:

a) $0<\sqrt{2}-1<1$. Do $2019<2020\Rightarrow(\sqrt{2}-1)^{2019}>(\sqrt{2}-1)^{2020}$

b) NX: $1015>0$

Do $\pi > 3,14 \Rightarrow \pi^{1015} > 3,14^{1015}$.

Câu 13. So sánh các số:

a. 2^{1200} và 3^{900}

b. $(\sqrt{7})^{85}$ và 3^{-150}

Cách giải:

a. Ta có $2^{1200} = 2^{4.300} = 16^{300}$ và $3^{900} = 3^{3.300} = 27^{300}$. Vì $300 > 0$ và $16 < 27$ nên $2^{1200} < 3^{900}$.

b. Vì $85 > 0$ và $\sqrt{7} > 1$ nên $(\sqrt{7})^{85} > (\sqrt{7})^0 = 1 \Rightarrow (\sqrt{7})^{85} > 1 (1)$. Vĩ $3 > 1$ và $-150 < 0$ nên $3^{-150} < 3^0 \Rightarrow 3^{-150} < 1 (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $(\sqrt{7})^{85} > 3^{-150}$.

Câu 14. Có thể kết luận gì về số a nếu:

a) $(2-a)^{\frac{3}{4}} > (2-a)^2$

b) $(1-a)^{-\frac{1}{3}} > (1-a)^{-\frac{1}{2}}$

Cách giải:

a) Ta có $\left.\begin{array}{l}(2-a)^{\frac{3}{4}} > (2-a)^2 \\ \frac{3}{4} < 2\end{array}\right\} \Rightarrow 0 < 2-a < 1 \Leftrightarrow \begin{cases}2-a > 0 \\ 2-a < 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a < 2 \\ a > 1\end{cases} \Leftrightarrow \quad 1 < a < 2$

b) $(1-a)^{-\frac{1}{3}} > (1-a)^{-\frac{1}{2}}$

Mà $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad 1-a > 1 \Leftrightarrow a < 0$.

4 DẠNG 4: ĐIỀU KIỆN CHO CÁC BIỂU THỨC CHỨA LUỸ THỪA

Câu 15. Tìm x đả biểu thức

a) $P(x) = \left(-x^2 + 6x - 8\right)^{\sqrt{2}}$ có nghĩa.

b) $P(x) = \left(9x^2 - 1\right)^{\frac{1}{5}}$ có nghĩa.

c) $P(x) = \left(x^2 - 5x + 6\right)^{-2019}$ có nghĩa.

d) $P(x) = \left(\frac{2x-3}{x^2-3x+2}\right)^3$ có nghĩa.

Cách giải:

a) Do $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow P(x)$ xác định khi $-x^2+6x-8>0 \Leftrightarrow 2<x<4$

b) $\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow P(x)$ xác định khi $9x^2-1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{1}{3} \\ x<-\frac{1}{3} \end{array}\right.$

c) $P(x)$ xác định khi $x^2-5x+6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

d) $P(x)$ xác định khi $x^2-3x+2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$.

Câu 16. Tìm các giá trị của tham số m để biểu thức sau xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$

a) $P(x)=\left(x^2-2x+m-3\right)^{-2}$

b) $P(x)=\left(x^2-2x+m-3\right)^{e}$

Cách giải:

a) $P(x)$ xác định khi $x^2-2x+m-3 \neq 0$

$P(x)$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$ *khi* $x^2-2x+m-3 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2-2x+m-3=0$ vô nghiệm.

$\Leftrightarrow \Delta=B^2-4AC<0$

$\Leftrightarrow (-2)^2-4 \cdot 1(m-3)<0$

$\Leftrightarrow m>4$

b) $P(x)$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$ khi $\Leftrightarrow x^2-2x+m-3>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta(0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0(ld \forall m) \\ 16-4m<0 \end{cases} \Leftrightarrow 16-4m<0 \Leftrightarrow m>4$

5 DẠNG 5. ỨNG DỤNG

Câu 17. Một chất phóng xạ có chu kì bán rã là 25 năm, tức là cứ sau 25 năm, khối lượng của chất phóng xạ đó giảm đi một nửa. Giả sử lúc đầu có 10 g chất phóng xạ đó. Viết công thức tính khối lượng của chất đó còn lại sau t năm và tính khối lượng của chất đó còn lại sau 120 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn theo đơn vị gam).

Cách giải:

Gọi $P(t)$ là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau t năm: $P(t)=10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}}$.

$\Rightarrow P_{120}=P(120)=10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{25}}=4,30761 \approx 4,308(g)$.

Câu 18. Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU .

(1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU khoảng 93.000 .000 dặm)

(Nguồn: R.l. Charles et al., Algebra 2, Peason).

Hỏi Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)? Biết khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là 1,52 AU.

Cách giải:

$P = 1,52^{\frac{3}{2}} = 1,874$ năm.

Câu 19. Cường độ ánh sáng tại độ sâu $h(\text{m})$ dưới một mặt hồ được tính bằng công thức $I_h = I_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{4}}$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ đó.

a) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 1m bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt hồ?

b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 3m gấp bao nhiêu lần cường độ ánh sáng tại độ sâu 6 m?

Cách giải:

a) Ta có: $\frac{I_1}{I_0} = \frac{I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}}{I_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \simeq 0,84 \approx 84\%$

b) Ta có: $\frac{I_3}{I_6} = \frac{I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}}{I_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6}{4}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(2^{-1}\right)^{-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} = 1,68$.