BÀI GIẢNG: LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC - TIẾT 1
CHUYÊN ĐỀ: HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT
MÔN: TOÁN 11 (KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG)
GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

MỤC TIÊU

- ✓ *Nhận biết khái niệm luỹ thừa với sớ mũ nguyên của một số thực khác 0 ; lũy thừa với số mũ hữu ti và luỹ thừa với số mũ thực của một số thực dương.*
- ✓ *Giải thích các tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên, số mũ hữu tỉ và luỹ thừa với số mũ thực.*
- ✓ *Sử dụng tính chất của phép tính luỹ thừa trong tính toán và rút gọn các biểu thức chứa biến.*
- ✓ *Tính giá trị biểu thức số có chứa phép tinh luỹ thừa bằng cách sử dụng máy tính cầm tay.*
- ✓ *Giải quyết một số vấn đề có liên quan đến môn học khác hoặc thực tiến gắn với phép tính luỹ thừa.*



Ngân hàng thường tính lãi suất cho khách hàng theo thể thức lãi kép theo định kì, tức là nếu đến kì hạn người gửi không rút lãi ra thi tiền lãi được tính vào vốn của kì kế tiếp. Nếu một người gửi số tiền P với lãi suất r mỗi kì thì sau N kì, số tiền người đó thu được (cả vốn lẫn lãi) được tính theo công thức lãi kép sau: $A = P(1+r)^N$.

Bác Minh gửi tiết kiệm số tiền 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng với lãi suất 6% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Tính số tiền (cả vốn lẫn lâi) bác Minh thu được sau 3 năm.

I. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ NGUYÊN

HĐ1 Nhận biết luỹ thừa với số mũ nguyên

Tính: $(1,5)^2; \left(-\frac{2}{3}\right)^3; (\sqrt{2})^4$.

Cách giải:

$(1,5)^2 = 2,25$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$

$\left(\sqrt{2}\right)^4 = 4$

Kết luận: Cho n là một số nguyên dương. Ta định nghĩa:

Với a là số thực tuỳ ý: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ thua sô}}$.

Với a là số thực khác 0 : $a^0 = 1; a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Trong biểu thức a^m, a gọi là **cơ số**, m gọi là **số mũ.**

Chú ý: 0^0 và $0^{-n}\left(n\in\mathbb{N}^{\wedge}\right)$ không có nghĩa.

Luỹ thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự như luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Với $a\neq 0, b\neq 0$ và m, n là các số nguyên, ta có:

$a^m\cdot a^n=a^{m+n};\quad \dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n};$

$\left(a^m\right)^n=a^{mn};\quad (ab)^m=a^m b^m;$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}$

Ví dụ: Tính

1) $a.a=a^2$

2) $\dfrac{a^5}{a^2}=a^3$

3) $\left(a^3\right)^5=a^{15}$

4) $\left(ab^3\right)^{-2}=a^{-2}b^{-6}$

5) $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^3=\dfrac{a^6}{b^3}$

Chú ý:

- Nếu $a>1$ thì $a^m>a^n$ khi và chỉ khi $m>n$.

- Nếu $0<a<1$ thì $a^m>a^n$ khi và chỉ khi $m<n$.

Ví dụ: $2^5>2^3\left(2>1\right);\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}\left(0<\dfrac{1}{2}<1\right)$

$2^{500}=\left(2^5\right)^{100}=32^{100};5^{200}=\left(5^2\right)^{100}=25^{100}\Rightarrow 2^{500}>5^{200}$

Mở rộng: So sánh cùng số mũ

$\begin{cases}a^m>b^m\\ m>0\end{cases}\Rightarrow a>b$

$\begin{cases}a^m>b^m\\ m<0\end{cases}\Rightarrow a<b$

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức: $A=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-8}\cdot 8^{-2}+(0,2)^{-4}\cdot 25^{-2}$

Cách giải:

$A=2^8\cdot\dfrac{1}{8^2}+\dfrac{1}{0,2^4}\cdot\dfrac{1}{25^2}=2^8\cdot\dfrac{1}{2^6}+\dfrac{1}{0,2^4\cdot 5^4}=2^2+\dfrac{1}{(0,2\cdot 5)^4}=4+1=5.$

Luyện tập 1. Một số dương x được gọi là viết dưới dạng kí hiệu khoa học nếu $x=a\cdot 10^m$, ở đó $1\le a<10$ và m là một số nguyên. Hãy viết các số liệu sau dưới dạng kí hiệu khoa học:

a) Khối lượng của Trái Đất khoảng 5980000000000000000000000 kg;

b) Khối lượng của hạt proton khoảng 0,000000000000000000000000000167262 kg.

(Theo SGK Vật lí 12, Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2020)

Cách giải:

a) Khối lượng của Trái Đất khoảng 5.98×10^{24} kg

b) Khối lượng của hạt proton khoảng 1.67262×10^{-27} kg

II. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ

HĐ2 Nhận biết khái niệm căn bậc n

a) Tìm tất cả các số thực x sao cho $x^2=4$.

b) Tìm tất cả các số thực x sao cho $x^3=-8$.

Cách giải:

a) $x^2=4=2^2=(-2)^2\Leftrightarrow x=\pm2$

b) $x^3=-8=(-2)^3\Leftrightarrow x=-2$.

Cho số thực a và số nguyên dương n. Số b được gọi là căn bậc n của số a nếu $b^n=a$.

Nhận xét. Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n và kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$.

Căn bậc 1 của số a chính là a.

Khi n là số chẵn, mối số thực dương có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau, giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (gọi là căn số học bậc n của a), giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.

Số âm có căn bậc chẵn không? Vì sao?

Ví dụ 2. Tính:

a) $\sqrt[3]{-64}$

b) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$

Cách giải:

a) $\sqrt[3]{-64}=\sqrt[3]{(-4)^3}=-4$

b) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4}=\dfrac{1}{2}$.

Luyện tập 2. Tính:

a) $\sqrt[3]{-125}$

b) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}$.

Cách giải:

a) $\sqrt[3]{-125}=\sqrt[3]{(-5)^3}=-5$

b) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^4}=\frac{1}{3}$

HĐ4 Nhận biết tính chất của căn bậc n

a) Tính và so sánh: $\sqrt[3]{-8}\cdot\sqrt[3]{27}$ và $\sqrt[3]{(-8)\cdot 27}$.

b) Tính và so sánh: $\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}$ và $\sqrt[3]{\frac{-8}{27}}$.

Cách giải:

a) $\sqrt[3]{-8}.\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{(-2)^3}.\sqrt[3]{3^3}=-2.3=-6$

$\sqrt[3]{(-8)\cdot 27}=\sqrt[3]{-216}=\sqrt[3]{(-6)^3}=-6\Rightarrow\sqrt[3]{-8}.\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{(-8).27}$

b) $\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{\sqrt[3]{(-2)^3}}{\sqrt[3]{3^3}}=\frac{-2}{3}$

$\sqrt[3]{\frac{-8}{27}}=\sqrt[3]{\left(\frac{-2}{3}\right)^3}=\frac{-2}{3}\Rightarrow\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}=\sqrt[3]{\frac{-8}{27}}$

Kết luận: Giả sử n, k là các số nguyên dương, m là số nguyên. Khi đó:

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt{ab}$;

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$;

$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$;

$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a \text{ khi } n \text{ le}\\ |a| \text{ khi } n \text{ chan};\end{cases}$

$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nk]{a}$

(Giả thiết các biểu thức ở trên đều có nghĩa).

Ví dụ 3: Tính:

a) $\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{-8}$

b) $\sqrt[3]{-3\sqrt{3}}$.

Cách giải:

a) $\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{-8}=\sqrt[5]{4\cdot(-8)}=\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{(-2)^5}=-2$.

b) $\sqrt[3]{-3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{-(\sqrt{3})^3}=\sqrt[3]{(-\sqrt{3})^3}=-\sqrt{3}$.

Luyện tập 3. Tính:

a) $\sqrt[3]{5}:\sqrt[3]{625}$

b) $\sqrt[5]{-25\sqrt{5}}$.

Cách giải:

a) $\sqrt[3]{5}:\sqrt[3]{625}=\sqrt[3]{\frac{5}{625}}=\sqrt[3]{\frac{1}{125}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^3}=\frac{1}{3}$.

b) $\sqrt[5]{-25\sqrt{5}}=\sqrt[5]{(-\sqrt{5})^5}=-\sqrt{5}$

HĐ4. Nhận biết luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

Cho a là một số thực dương.

a) Với n là số nguyên dương, hãy thử định nghĩa $a^{\frac{1}{n}}$ sao cho $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a$

b) Từ kết quả của câu a, hãy thử định nghĩa $a^{\frac{m}{n}}$, với m là số nguyên và n là số nguyên dương, sao cho $a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Cách giải:

a) Ta có: $(\sqrt[n]{a})^n=a$ mà $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a$ nên $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=\sqrt[n]{a}\Rightarrow a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

b) Theo câu a ta có $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ mà $a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ nên $a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

Kết luận: Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r=\frac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên và n là số nguyên dương.

Luỹ thừa của a với số mũ r, kí hiệu là a^r, xác định bởi $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Ví dụ: $\sqrt{a^1}=a^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[4]{a^5}=a^{\frac{5}{4}}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{a^{2/3}}=a^3$

Vì sao trong định nghĩa luỹ thừa với số mũ hữu tỉ lại cần điều kiện cơ số a > 0?

Cách giải:

+ Giả sử định nghĩa lũy thừa với số mũ r là đúng với a < 0 .

Xét lũy thừa $(-1)^{\frac{1}{3}}$. Theo định nghĩa ta có $(-1)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{(-1)^1}=-1$

Mặt khác, do $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ nên $(-1)^{\frac{1}{3}}=(-1)^{\frac{2}{6}}$. Áp dụng định nghĩa ta lại có $(-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}=1$.

Như vậy, từ định nghĩa ta chứng minh được $-1=1$ $-1=\sqrt[3]{-1}=(-1)^{\frac{1}{3}}=(-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}=1$

Có thể nói, trong tình huống này định nghĩa với cơ số âm đã tự mâu thuẫn.

+ Lũy thừa có số mũ hữu tỉ với cơ số $a=0$ thì dẫn đến vô nghĩa nếu mũ âm. Ví dụ $0^{\frac{-1}{2}}=\sqrt{0^{-1}}=\sqrt{\frac{1}{0}}$

Như vậy trong định nghĩa lũy thừa với số mũ hữu tỉ cần điều kiện cơ số a > 0

Chú ý. Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ (của một số thực dương) có đầy đủ các tính chất như luỹ thừa với số mũ nguyên đã nêu trong Mục 1.

Ví dụ 4: Tính

a) $16^{\frac{3}{2}}$

b) $8^{\frac{-2}{3}}$

Cách giải:

a) $16^{\frac{3}{2}}=\sqrt{16^3}=\sqrt{\left(4^2\right)^3}=\sqrt{\left(4^3\right)^2}=4^3=64$.

b) $8^{\frac{-2}{3}}=\sqrt[3]{8^{-2}}=\sqrt[3]{\left(2^3\right)^{-2}}=\sqrt[3]{\left(2^{-2}\right)^3}=2^{-2}=\frac{1}{4}$.

Cách 2:

a) $16^{\frac{3}{2}}=\left(2^4\right)^{\frac{3}{2}}=2^6=64$

b) $8^{\frac{-2}{3}}=\left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}}=2^{-2}=\frac{1}{4}$

Tương tự: $27^{\frac{4}{3}}=\left(3^3\right)^{\frac{4}{3}}=3^4=81$

$81^{-\frac{3}{4}}=\left(3^4\right)^{-\frac{3}{4}}=3^{-3}=\frac{1}{27}$

$0,001^{-\frac{1}{3}}=\left(10^{-3}\right)^{\frac{-1}{3}}=10$

Luyện tập 4. Rút gọn biểu thức: $A=\frac{x^{\frac{3}{2}}y+xy^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}(x,y>0)$.

Cách giải:

$$A=\frac{x^{\frac{3}{2}}y+xy^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{xy\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=xy.$$

III. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

1 Khái niệm lũy thừa với số mũ thực

HĐ5: Nhận biết luỹ thừa với số mũ thực

Ta biết rằng $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ và $\sqrt{2}=1,4142135624\ldots$

Gọi (r_n) là dãy số hữu tỉ dùng đề xấp xỉ số $\sqrt{2}$, với $r_1=1;\ r_2=1,4;r_3=1,41;r_4=1,4142;\ldots$

a) Dùng máy tính cầm tay, hãy tính: $3^{11};3^{12};3^5;3^{1/4}$ và $3^{\sqrt{2}}$.

b) Có nhận xét gì về sai số tuyệt đối giữa $3^{\sqrt{2}}$ và 3^r, tức là $\left|3^{\sqrt{2}}-3^r\right|$, khi n càng lớn?

Cách giải:

$a)3^{r_1}=3^1=3$

$3^{r_2}=3^{1,4}=4,655536722$

$3^{r_3}=3^{1,41}=4,706965002$

$3^{r_4}=3^{1,4142}=4,72873393$

$3^{\sqrt{2}}=4,728804388$

b) Ta có

$\left|3^{\sqrt{2}}-3^{r_1}\right|=4,728804388-3=1,728804388$

$\left|3^{\sqrt{2}}-3^{r_2}\right|=4,728804388-4,655536722=007326766609$

$\left|3^{\sqrt{2}}-3^{r_3}\right|=4,728804388-4,706965002=002183938612$

$\left|3^{\sqrt{2}}-3^{r_4}\right|=4,728804388-4,72873393=00000704576662$

Vậy sai số tuyệt đối giữa $3^{\sqrt{2}}$ và 3^{r_n} là giảm dần khi n càng lớn.

Cho a là số thực dương và α là một số vô tỉ. Xét dãy số hữu tỉ (r_n) mà $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n=\alpha$. Khi đó, dãy số $\left(a^{r_n}\right)$ có giới hạn xác định và không phụ thuộc vào dãy số hữu tỉ (r_n) đã chọn. Giới hạn đó gọi là luỹ thừa của a với số mũ α, kí hiệu là a^α.

$$a^a=\lim_{n\to+\infty} a^{r_n}.$$

Chú ý. Luỹ thừa với số mũ thực (của một số dương) có đầy đủ các tính chất nhu luỹ thừa với số mũ nguyên đã nêu trong Mục 1.

Ví dụ 5. Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{a^{\sqrt{5}-1}\cdot a^{3-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{3}+1}\right)^{\sqrt{3}-1}}(a>0)$

Cách giải:

$$A=\frac{a^{\sqrt{5}-1}\cdot a^{3-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{3}+1}\right)^{\sqrt{3}-1}}=\frac{a^{\sqrt{5}-1+3-\sqrt{5}}}{a^{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}}=\frac{a^2}{a^{3-1}}=\frac{a^2}{a^2}=1$$

Ví dụ 6. Không sử dụng máy tính, hãy so sánh các số $8^{\sqrt{3}}$ và $4^{2\sqrt{3}}$

Cách giải:

Ta có: $8^{8^{\sqrt{3}}}=\left(2^3\right)^{\sqrt{3}}=2^{3\sqrt{3}}$ và $4^{2\sqrt{3}}=\left(2^2\right)^{2\sqrt{3}}=2^{4\sqrt{3}}$.

Vì $3\sqrt{3}<4\sqrt{3}$ và $2>1$ nên $2^{3\sqrt{3}}<2^{4\sqrt{3}}$. Vậy $8^{\sqrt{3}}<4^{2\sqrt{3}}$.

Luyện tập 5. Rút gọn biểu thức: $A=\frac{\left(a^{\sqrt{2}-1}\right)^{1+\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{5}-1}\cdot a^{3-\sqrt{5}}}(a>0)$.

Cách giải:

$$A=\frac{\left(a^{\sqrt{2}-1}\right)^{1+\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{5}-1}\cdot a^{3-\sqrt{5}}}=\frac{a^{(\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2})}}{a^{\sqrt{5}-1+3-\sqrt{5}}}=\frac{a^1}{a^2}=\frac{1}{a}$$

Vận dụng. Giải bài toán trong tình huống mở đầu.

Cách giải:

Sau 1 kì hạn 12 tháng, số tiền bác Minh nhận được là:

$A=P(1+r)^N=100,000,000(1+0.06)^1=106,000,000$

Sau 2 kì hạn 12 tháng, số tiền bác Minh nhận được là:

$A=P(1+r)^N=106,000,000(1+0.06)^1=112,360,000$

Sau 3 kì hạn 12 tháng, số tiền bác Minh nhận được là:

$A=P(1+r)^N=112,360,000(1+0.06)^1=119,101,600$

Vậy, số tiền bác Minh thu được sau 3 năm là 119,101,600 đồng.

b) Tính luỹ thừa với số mũ thực bằng máy tính cầm tay

Có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính căn bậc n và luỹ thừa với số mũ thực.

Tính (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư)	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết quả
$\sqrt{20,15}$	$\sqrt{\square}$ 2 0 . 1 5 =	4.488875137	$\sqrt{20,15}\approx 4,4889$
$\sqrt[5]{320}$	SHIFT $x^{\square}$ 5 ▶ 3 2 0 =	3.169786385	$\sqrt[5]{320}\approx 3,1698$
$15^{3,2}$	1 5 $x^{\square}$ 3 . 2 =	5800.855256	$15^{3,2}\approx 5\,800,8553$