BÀI GIẢNG: BÀI TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI TỐI ƯU
CHUYÊN ĐỀ: LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ
MÔN: TOÁN 11 (CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP)
GIÁO VIÊN: TRẦN NGỌC QUANG HUY

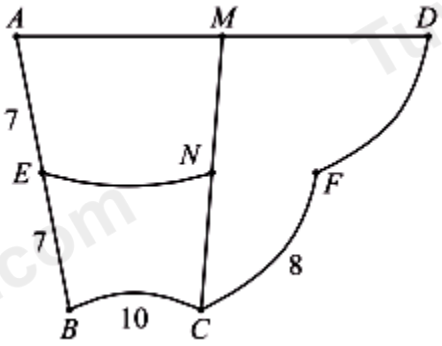
MỤC TIÊU

- ✓ *Đồ thị có trọng số*
- ✓ *Bài toán tìm đường đi ngắn nhất*

I. ĐỒ THỊ CÓ TRỌNG SỐ VÀ ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

- Một đồ thị mà mỗi cạnh được gán thêm một số được gọi là một dồ thị có trọng số. Số được gán cho mỗi cạnh được gọi là trọng số của cạnh đó. Trọng số của cạnh a được kí hiệu là w_a.

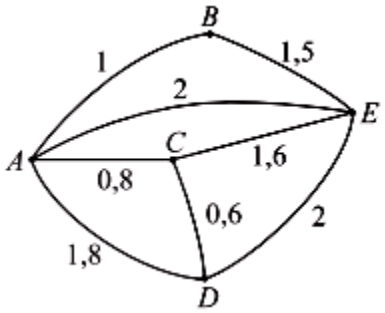
- Trọng số của cạnh còn được hiểu là độ dài của cạnh, mặc dù trong thực tế trọng số được dung để biểu diễn nhiều loại đại lượng khác gắn liền với cạnh đó.



VD1. Bảng bên cho biết giá vé chuyến bay giữa các thành phố A, B, C, D và E. Hãy vẽ một đồ thị có trọng số biểu diễn các chuyến bay cùng với giá vé giữa các thành phố này.

	A	B	C	D	E
A		1	0,8	1,8	2
B			×	×	1,5
C				0,6	1,6
D					2
E					

Cách giải:

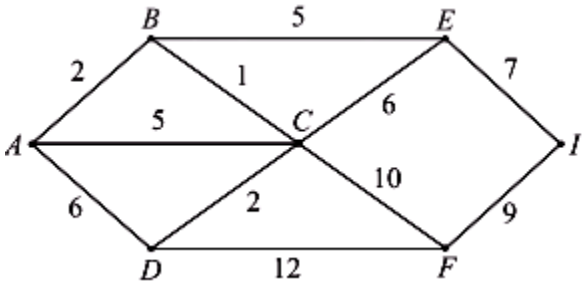


- Tổng trọng số (hay tổng độ dài) của các cạnh tạo thành đường đi gọi là độ dài của đường đi đó. Độ dài của đường đi m được kí hiệu là l_m.

- Trong đồ thị có trọng số, đường đi có độ dài bé nhất trong tất cả các đường đi từ đỉnh A đến đỉnh B gọi là đường đi ngắn nhất từ A đến B.

- Chú ý: Khi xét bài toán tìm đường đi ngắn nhất, ta chỉ xét đồ thị liên thông có trọng số.

VD2. Cho đồ thị có trọng số như hình vẽ.



a) Chỉ ra trọng số của các cạnh AB, CF, DF

b) Tính độ dài của các đường đi AC, ADCF, BECI.

c) Cạnh AD có phải là đường đi ngắn nhất từ A đến D không?

Cách giải:

a) $w_{AB}=2; w_{CF}=10; w_{DF}=12$.

b) $l_{AC}=5; l_{ADCF}=6+2+10=18; l_{BECF}=5+6+10+9=30$

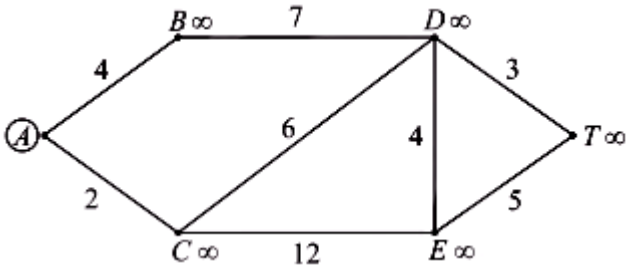
c) $l_{ABCD}=2+1+2=5<l_{AD}=6$ nên cạnh AD không phải là đường đi ngắn nhất từ A đến D.

II. THUẬT TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

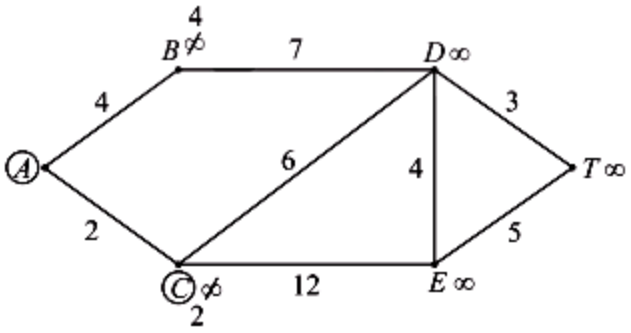
Bài toán: Tìm đường đi ngắn nhất từ A đến T.

Cụ thể ta thực hiện như sau:

Đầu tiên, gán nhãn cho đỉnh A bằng $0\left(n_A=0\right)$, cho các đỉnh khác đều bằng ∞ (coi ∞ là một số lớn hơn mọi số thực). Khoanh tròn đỉnh A và viết nhãn của mỗi đỉnh khác bên cạnh đỉnh đó (Hình 7). Dưới đây, mỗi lần thay đổi nhãn của đỉnh thì ta gạch nhãn cũ và viết thêm nhãn mới

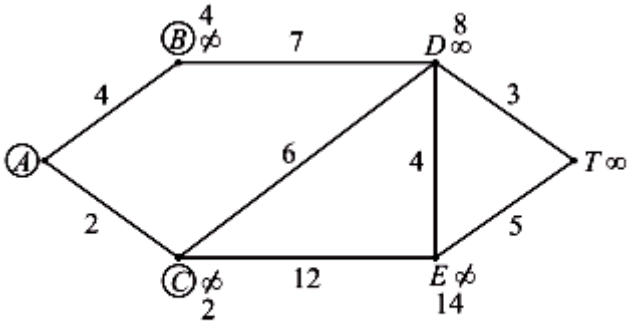


Bước 1. Tìm đỉnh (khác A) gần A nhất. Ta chỉ cần tìm trong các đỉnh kề với A, gồm hai đỉnh B và C. Ta tính $n_A + w_{AB} = 0 + 4 = 4$. Số này nhỏ hơn nhãn hiện tại của B (bằng ∞), nên ta đổi nhãn của B thành $n_B = 4$ (bằng l_{AB}). Tương tự, tính $n_A + w_{AC} = 0 + 2 = 2$ và đổi nhãn của C thành $n_C = 2$ (bằng l_{AC}). Ta thấy đỉnh C có nhãn nhỏ nhất trong các đỉnh khác A nên C là đỉnh gần A nhất. Ta cố định nhãn và khoanh tròn đỉnh C (Hình 8).



Hình 8

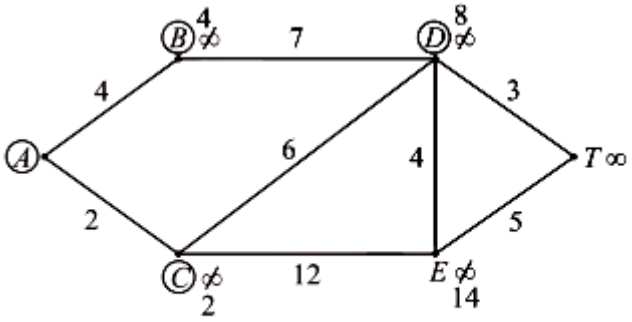
Bước 2. Tìm đỉnh gần A thứ hai. Trước hết, xét các đỉnh kề với C (là đỉnh vừa được khoanh tròn ở cuối bước trước) trong các đỉnh chưa khoanh tròn, gồm D và E. Ta tính $n_C + w_{CD} = 2 + 6 = 8$. Số này nhỏ hơn nhãn hiện tại của D (là ∞), nên ta đổi nhãn của D thành $n_D = 8$ (bằng l_{ACD}). Tương tự, tính $n_C + w_{CE} = 2 + 12 = 14$ và đổi nhãn E thành $n_E = 14$. Ta thấy, trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh B có nhãn nhỏ nhất, nên nó là đỉnh gần A thứ hai. Ta cố định nhãn và khoanh tròn đỉnh B (Hình 9).



Hình 9

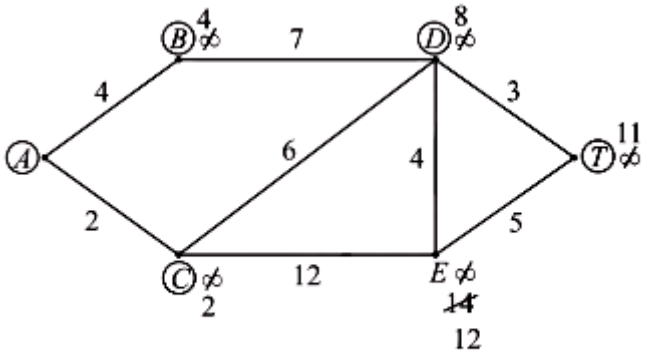
Bước 3. Tìm đỉnh gần A thứ ba. Trước hết, trong các đỉnh chưa khoanh tròn, chỉ có đỉnh D kề với B. Tính $n_B + w_{BD} = 4 + 7 = 11$. Số này lớn hơn nhãn hiện tại $n_D = 8$ của D nên ta giữ nguyên nhãn này. Trong các

đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh D có nhãn nhỏ nhất, nên nó là đỉnh gần A thứ ba. Ta cố định nhãn và khoanh tròn đỉnh D (Hình 10).



Hình 10

Bước 4. Tìm đỉnh gần A thứ tư. Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, xét các đỉnh kề với D, gồm E và T. Tính $n_D + w_{DE} = 8+4 = 12$. Số này nhỏ hơn nhãn hiện tại của E (là 14) nên ta đổi nhãn của E thành $n_E = 12$



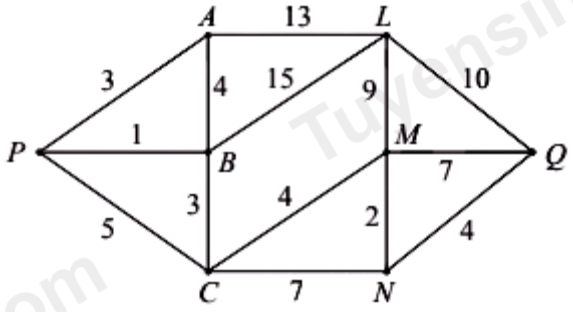
Hình 11

Tính $n_D + w_{DT} = 8+3 = 11$. Số này nhỏ hơn nhãn hiện tại của T (là ∞), nên đổi nhãn của T thành $n_T = 11$

Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh T có nhãn nhỏ nhất, nên T là đỉnh gần A thứ tư. Ta cố định nhãn và khoanh tròn đỉnh T. Nhìn ngược lại lên trên ta thấy $n_T = 11 = w_{AC} + w_{CD} + w_{DT} = l_{ACDT}$.

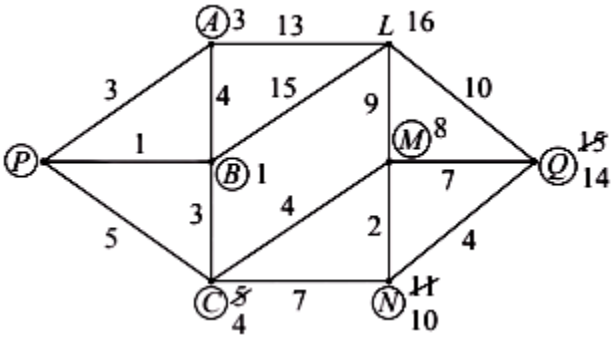
Đến đây suy ra, đường đi ngắn nhất từ A đến T là ACDT, với độ dài bằng 11 (Hình 11).

Ví dụ 3. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh P đến đỉnh Q trong đồ thị có trọng số ở Hình 12 .



Hình 12

Cách giải:



Gán nhãn cho P bằng $0\left(n_P=0\right)$, các đỉnh khác bằng ∞. Khoanh tròn đỉnh P.

Tại các đỉnh kề với P, gồm A, B và C, lần lượt ghi các nhãn 3,1 và 5 (lần lượt bằng n_P+w_{PA}, n_P+w_{PB}, n_P+w_{PC}). Trong các đỉnh khác P, đỉnh có nhãn bé nhất là B. Khoanh tròn đỉnh B (đỉnh gần đỉnh P nhất, chỉ tính các đỉnh khác đỉnh P).

Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh kề với B gồm A, L và C. Tại A giữ nguyên nhãn 3, do $n_B+w_{BA}=1+4=5>3$. Tại L, ghi nhãn 16 (bằng n_B+w_{BL}). Tại C, đổi nhãn 5 thành 4 (bằng n_B+w_{BC}). Lúc này, trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh A có nhãn nhỏ nhất. Khoanh tròn đỉnh A (đỉnh khác P gần đỉnh P thứ hai).

Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh kề với A chỉ có L. Tại L, giữ nguyên nhãn 16, do $n_A+w_{AL}=3+13=16$. Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh C có nhãn nhỏ nhất. Khoanh tròn đỉnh C (đỉnh gần đỉnh P thứ ba).

Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh kề với C gồm M và N. Tại M, ghi nhãn 8 (bằng n_C+w_{CM}). Tại N, ghi nhãn 11 (bằng n_C+w_{CN}). Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh M có nhãn nhỏ nhất. Khoanh tròn đỉnh M (đỉnh gần đỉnh P thứ tư).

Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh kề với M gồm L, N và Q. Tại L, giữ nguyên nhãn 16, do $n_M+w_{ML}=8+9=17>16$. Tại N, đổi nhãn 11 thành 10 (bằng n_M+w_{MN}). Tại Q, ghi nhãn 15 (bằng n_M+w_{MQ}). Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh N có nhãn nhỏ nhất. Khoanh tròn đỉnh N (đỉnh gần đỉnh P thứ năm).

Trong các đỉnh chưa khoanh tròn, đỉnh kề với N chỉ có Q. Tại Q, đổi nhãn 15 thành 14 (bằng n_N+w_{NQ}). Chỉ còn hai đỉnh L và Q chưa khoanh tròn, đỉnh Q có nhãn nhỏ hơn. Khoanh tròn đỉnh Q (đỉnh gần đỉnh P thứ sáu).

Nhìn ngược lại các bước ở trên, ta thấy

$$n_Q=14=w_{PB}+w_{BC}+w_{CM}+w_{MN}+w_{NQ}=l_{PBCMNQ}$$

Suy ra PBCMNQ là đường đi ngắn nhất từ P đến Q, với độ dài bằng 14.