BÀI GIẢNG: BIẾN CỐ HỢP, BIẾN CỐ GIAO, BIẾN CỐ ĐỘC LẬP - TIẾT 1
CHUYÊN ĐỀ: CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT
MÔN: TOÁN 11 (KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG)
GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

MỤC TIÊU

✓ *Nhận biết các khái niệm biến cố hợp, biến cố giao, biến cố độc lập.*

PHẦN MỞ ĐẦU

Trong một cuộc khảo sát về mức sống của người Hà Nội, người khảo sát chọn ngẫu nhiên một gia đình ở Hà Nội. Xét các biến cố sau:

M: "Gia đình đó có ti vi";

N: "Gia đình đó có máy vi tính";

E: "Gia đình đó có ti vi hoặc máy vi tính";

F: "Gia đình đó có cả ti vi và máy vi tính";

G: "Gia đình đó có ti vi hoặc máy vi tính nhưng không có cả hai thiết bị nói trên";

H: "Gia đình đó không có cả ti vi và máy vi tính".

Các biến cố trên rõ ràng có mối liên hệ với nhau. Chúng ta có thể mô tả các mối liên hệ đó một cách cô đọng, súc tích bằng các khái niệm và kí hiệu toán học được không?

I. BIẾN CỐ HỢP

HĐ1. Một tổ trong lớp 11A có 10 học sinh. Điểm kiểm tra học kì I của 10 bạn này ở hai môn Toán và Ngữ văn được cho như sau:

Môn / Tên học sinh	Toán	Ngữ văn
Bảo	7	6
Dung	5	9
Định	5	6
Lan	8	7
Long	6	8
Hương	9	7
Phúc	8	6
Cường	8	9
Tuấn	4	5
Trang	10	8

Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong tổ. Xét các biến cố sau:

A: "Học sinh đó được điểm giỏi môn Ngữ văn";

B: "Học sinh đó được điểm giỏi môn Toán";

C: "Học sinh đó được điểm giỏi môn Ngữ văn hoặc điểm giỏi môn Toán".

a) Mô tả không gian mẫu và các tập con A, B, C của không gian mẫu.

b) Tìm $A \cup B$

Cách giải:

a) A = {Dung, Long, Cường, Trang}

B = {Lan, Hương, Phúc, Cường, Trang}

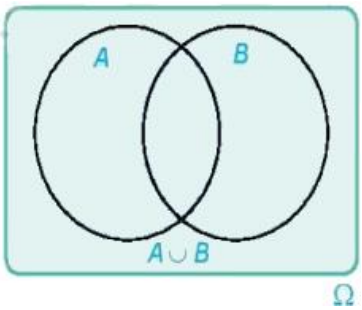
C = {Dung, Long, Lan, Hương, Phúc, Cường, Trang}

b) $A \cup B = \{$ Dung, Long, Cường, Trang, Lan, Hương, Phúc$\}$

Kết luận:

Cho A và B là hai biến cố. Biến cố: "A hoặc B xảy ra" được gọi là biến cố hợp của A và B, kí hiệu là $A \cup B$.

Biến cố hợp của A và B là tập con $A \cup B$ của không gian mẫu Ω.



Ví dụ 1. Một hộp đựng 15 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 15 . Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Gọi E là biến cố "Số ghi trên tấm thẻ là số lẻ"; F là biến cố "Số ghi trên tấm thẻ là số nguyên tố".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Nêu nội dung của biến cố hợp $G = E \cup F$. Hỏi G là tập con nào của không gian mẫu?

Cách giải:

a) Không gian mẫu $\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15\}$.

b) $E \cup F$ là biến cố "Số ghi trên tấm thẻ là số lẻ hoặc số nguyên tố".

Ta có $E = \{1;3;5;7;9;11;13;15\}; F = \{2;3;5;7;11;13\}$.

Vậy $G = E \cup F = \{1;2;3;5;7;9;11;13;15\}$.

Luyện tập 1. Một tổ trong lớp 11B có 4 học sinh nữ là Hương, Hồng, Dung, Phương và 5 học sinh nam là Sơn, Tùng, Hoàng, Tiến, Hải. Trong giờ học, giáo viên chọn ngẫu nhiên một học sinh trong tổ đó lên bảng để kiểm tra bài.

Xét các biến cố sau:

H: "Học sinh đó là một bạn nữ";

K: "Học sinh đó có tên bắt đầu là chữ cái H ".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Nêu nội dung của biến cố hợp $M = H \cup K$. Mỗi biến cố H, K, M là tập con nào của không gian mẫu?

Cách giải:

a) Không gian mẫu của bài toán này là tập hợp các học sinh trong tổ lớp, nó có 9 phần tử và được ký hiệu là $\Omega = \{$ Hương, Hồng, Dung, Phương, Sơn, Tùng, Hoàng, Tiến, Hải$\}$.

b) Biến cố H xảy ra khi học sinh được chọn là một bạn nữ, nó là tập hợp các học sinh nữ và được ký hiệu là $H = \{$ Hương, Hồng, Dung, Phương$\}$.

Biến cố K xảy ra khi học sinh được chọn có tên bắt đầu là chữ cái H , được ký hiệu là $K = \{$ Hương, Hồng, Hoàng, Hải$\}$.

Biến cố hợp M xảy ra khi học sinh được chọn là một bạn nữ hoặc có tên bắt đầu bằng chữ H, nó là tập hợp các học sinh trong tập H hoặc K (bao gồm cả những học sinh trùng nhau của hai tập này) và được ký hiệu là $M = H \cup K = \{$Hương, Hồng, Dung, Phương, Hoàng, Hải$\}$.

III. BIẾN CỐ GIAO

HĐ2. Trở lại tình huống trong HĐ1. Xét biến cố D: "Học sinh đó được điểm giỏi môn Ngữ văn và điểm giỏi môn Toán".

a) Hỏi D là tập con nào của không gian mẫu?

b) Tìm $A \cap B$

Cách giải:

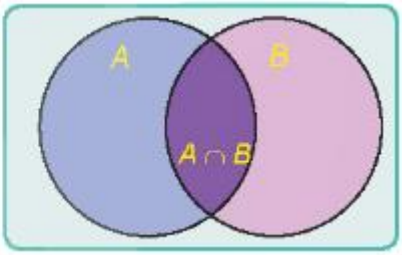
a) $D = \{$Cường, Trang$\}$

b) $A \cap B = \{$Cường, Trang$\}$

Kết luận:

Cho A và B là hai biến cố. Biến cố: "Cả A và B đều xảy ra" được gọi là biến cố giao của A và B, kí hiệu là AB.

Biến cố giao của A và B là tập con $A \cap B$ của không gian mẫu Ω.



Ví dụ 2. Một tổ trong lớp 11C có 9 học sinh. Phỏng vấn 9 bạn này với câu hỏi: "Bạn có biết chơi môn thể thao nào trong hai môn này không?". Nếu biết thì đánh dấu X vào ô ghi tên môn thể thao đó, không biết thì để trống. Kết quả thu được như sau:

Môn thể thao / Tên học sinh	Cầu lông	Bóng bàn
Bảo	X	
Đăng	X	
Giang		X
Hoa		
Long	X	X
Mai		
Phúc	X	X
Tuấn	X	X
Yến	X	

Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong tổ. Xét các biến cố sau:

U: "Học sinh được chọn biết chơi cầu lông";

V: "Học sinh được chọn biết chơi bóng bàn".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Nội dung của biến cố giao T=UV là gì? Mỗi biến cố U, V, T là tập con nào của không gian mẫu?

Cách giải:

a) Không gian mẫu $\Omega =$ {Bảo; Đăng; Giang; Hoa; Long; Mai; Phúc; Tuấn; Yến}.

b) T là biến cố "Học sinh được chọn biết chơi cả cầu lông và bóng bàn".

Vậy $T = U \cap V =$ { Long; Phúc; Tuấn}.

Luyện tập 2. Một hộp đựng 25 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 25. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Xét các biến cố P : "Số ghi trên tấm thẻ là số chia hết cho 4"; Q: "Số ghi trên tấm thẻ là số chia hết cho 6".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Nội dung của biến cố giao $S = PQ$ là gì? Mỗi biến cố P, Q, S là tập con nào của không gian mẫu?

Cách giải:

a) Không gian mẫu là tập hợp các số từ 1 đến 25, được ký hiệu là $\Omega = 1, 2, 3, \ldots, 25$.

b) Biến cố P là tập hợp các số chia hết cho 4, được ký hiệu là $P = \{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$.

Biến cố Q là tập hợp các số chia hết cho 6, được ký hiệu là $Q = \{6, 12, 18, 24\}$.

Biến cố S là giao của hai biến cố P và Q, nghĩa là các số vừa chia hết cho 4 và vừa chia hết cho 6 , được ký hiệu là $S = P \cap Q = \{12, 24\}$.

Vậy P, Q và S lần lượt là các tập con của không gian mẫu Ω.

Vận dụng. Trở lại tình huống mở đầu. Sử dụng khái niệm biến cố hợp, biến cố giao, biến cố đối, ta biểu diễn biến cố G, H theo các biến cố M và N như sau:

Biến cố G xảy ra khi và chỉ khi hoặc gia đình đó có ti vi và không có máy vi tính hoặc gia đình đó không có ti vi và có máy vi tính. Vậy $G = M\bar{N} \cup \bar{M}N$.

Biến cố H xảy ra khi và chỉ khi gia đình đó không có cả ti vi và máy vi tính. Vậy $H = \bar{M}\bar{N}$.

Hãy biểu diễn mỗi biến cố E, F theo các biến cố M và N.

Cách giải:

Biến cố E xảy ra khi và chỉ khi gia đình đó có ti vi hoặc máy vi tính.

Vậy $E = MUN$.

Biến cố F xảy ra khi và chỉ khi gia đình đó có cả ti vi và máy vi tính. Vậy $F = MN$.

III. BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

HĐ3. Hai bạn Minh và Sơn, mỗi người gieo đồng thời một con xúc xắc cân đối, đồng chất. Xét hai biến cố sau:

A: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc bạn Minh gieo là số chẵn";

B: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc bạn Sơn gieo là số chia hết cho 3 ".

Việc xảy ra hay không xảy ra biến cố A có ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố B không? Việc xảy ra hay không xảy ra biến cố B có ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố A không?

Cách giải:

Việc xảy ra biến cố A không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố B, và ngược lại, việc xảy ra biến cố B cũng không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố A vì 2 bạn mỗi người 1 con xúc xắc và gieo đồng thời.

Kết luận:

Cặp biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Chú ý. Nếu cặp biến cố A và B độc lập thì các cặp biến cố: A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B; $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập.

Ví dụ 3. Một hộp đựng 4 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh, có cùng kích thước và khối lượng.

a) Bạn Minh lấy ngẫu nhiên một viên bi, ghi lại màu của viên bi được lấy ra rồi trả lại viên bi vào hộp. Tiếp theo, bạn Hùng lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đó. Xét hai biến cố sau:

A: "Minh lấy được viên bi màu đỏ";

B : "Hùng lấy được viên bi màu xanh".

Chứng tỏ rằng hai biến cố A và B độc lập.

b) Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một viên bi và không trả lại vào hộp. Tiếp theo, bạn Tùng lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đó. Xét hai biến cố sau:

C: "Sơn lấy được viên bi màu đỏ";

D : "Tùng lấy được viên bi màu xanh".

Chứng tỏ rằng hai biến cố C và D không độc lập.

Cách giải:

a) Nếu A xảy ra, tức là Minh lấy được viên bi màu đỏ. Vì Minh trả lại viên bi đã lấy vào hộp nên trong hộp có 4 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh. Vậy $P(B)=\frac{5}{9}$.

Nếu A không xảy ra, tức là Minh lấy được viên bi màu xanh. Vì Minh trả lại viên bi đã lấy vào hộp nên trong hộp vẫn có 4 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh. Vậy $P(B)=\frac{5}{9}$.

Như vậy, xác suất xảy ra của biến cố B không thay đổi bởi việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố A.

Vì Hùng lấy sau Minh nên $P(A)=\frac{4}{9}$ dù biến cố B xảy ra hay không xảy ra.

Vậy A và B độc lập.

b) Nếu C xảy ra, tức là Sơn lấy được viên bi màu đỏ. Vì Sơn không trả lại viên bi đó vào hộp nên trong hộp có 8 viên bi với 3 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh. Vậy $P(D)=\frac{5}{8}$. Nếu C không xảy ra, tức là Sơn lấy được viên bi màu xanh. Vì Sơn không trả lại viên bi đã lấy vào hộp nên trong hộp có 4 viên bi màu đỏ và 4

viên bi màu xanh. Vậy $P(D)=\frac{4}{8}$. Như vậy, xác suất xảy ra của biến cố D đã thay đổi phụ thuộc vào việc biến cố C xảy ra hay không xảy ra. Do đó, hai biến cố C và D không độc lập.

Luyện tập 3. Trở lại tình huống trong HĐ3. Xét hai biến cố sau:

E: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc bạn Minh gieo là số nguyên tố";

B : "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc bạn Sơn gieo là số chia hết cho 3 ".

Hai biến cố E và B độclập hay không độc lập?

Cách giải:

Nếu E xảy ra tức là số chấm xuất hiện trên con xúc xắc bạn Minh gieo là số nguyên tố. Vì mỗi bạn một con xúc xắc nên $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Nếu E không xảy ra tức là số chấm xuất hiện trên con xúc xắc bạn Minh gieo không là số nguyên tố. Vì mỗi bạn một con xúc xắc nên $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$