BÀI GIẢNG: TÌM KHOẢNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ
CHUYÊN ĐỀ: HÀM SỐ VÀ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM
MÔN: TOÁN 12
GIÁO VIÊN: NGUYỄN HOÀNG TÙNG

MỤC TIÊU

✓ *Định nghĩa đơn điệu của hàm số và quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số*

I. LÝ THUYẾT

1 Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng K với K là một khoảng

- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là đồng biến trên khoảng K nếu $\forall x_1,x_2\in K, x_1<x_2\to f(x_1)<f(x_2)$.

- Hàm số $y=f(x)$ được gọi là nghịch biến trên khoảng K nếu $\forall x_1,x_2\in K, x_1<x_2\to f(x_1)>f(x_2)$.

- Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là đơn điệu trên K

2 Định lý

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.

- Nếu $f'(x)\geq 0,\forall\in K$ và $f'(x)=0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng K.

- Nếu $f'(x)\leq 0,\forall\in K$ và $f'(x)=0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng K.

II. BÀI TẬP

ĐỀ BÀI

Dạng 1. Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến dựa vào công thức, bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm số

Câu 1. (Đề minh họa 2 , năm 2017) Cho hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3},1\right)$

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3},1\right)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1,+\infty)$

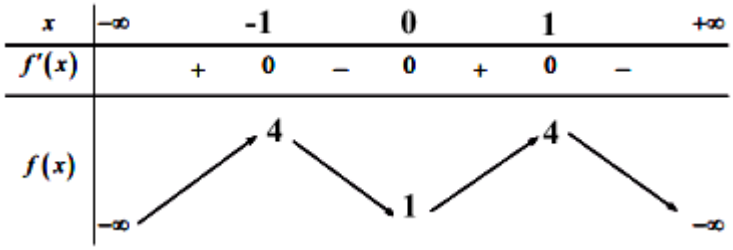
Câu 2. (Đề minh họa 3, năm 2017) Cho hàm số $y=\frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty,-1)$ **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty,-1)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty,+\infty)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1,+\infty)$

Câu 3. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=\dfrac{x^2+4x+4}{x+1}$

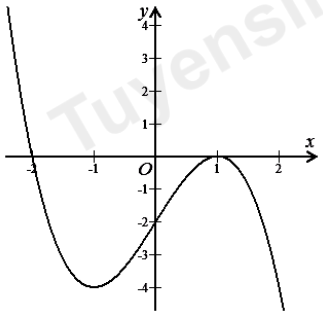
Câu 4. (Đề minh họa 2, năm 2018) Cho hàm số có bảng biến thiên như sau.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(1;4)$ **D.** $(0;\dfrac{1}{2})$

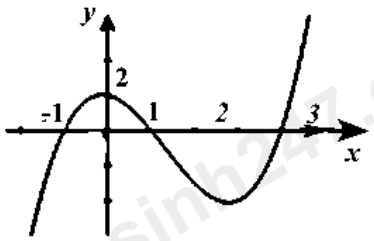
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty,-1)$ **B.** $(-1,1)$

C. $(0,+\infty)$ **D.** $(-\infty,+\infty)$

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(0;1)$ **B.** $(-1;2)$

C. $(1;2)$ **D.** $(2;+\infty)$

Câu 7. (THPT Trần Hưng Đạo - 2018) Trong các hàm số sau, hàm số nào luôn nghịch biến trên R?

A. $y=x^4+x^2+2017$ **B.** $y=x^3+3x^2+3x+2017$

C. $y=\sin x-x$ **D.** $y=\cot x$

Câu 8. (Chuyên Thái Bình - 2018) Cho hàm số $y=\sin x-\cos x+\sqrt{3}x$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây:

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ **B.** Hàm số nghịch biến trên $(1;2)$

C. Hàm số là hàm lẻ **D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng 1. Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến dựa vào công thức, bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm số

Câu 1. (Đề minh họa 2 , năm 2017) Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1, +\infty)$

Cách giải:

$y = x^3 - 2x^2 + x + 1.$

$D = R.$

$$y' = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗	

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

Chọn A.

Câu 2. (Đề minh họa 3, năm 2017) Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty, -1)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty, -1)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty, +\infty)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1, +\infty)$

Cách giải:

$$y = \frac{x-2}{x+1}; D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$y' = \frac{1.1 - (-2).1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	1

Vậy hàm số đồng biến trong $(-\infty, -1)$ và $(-1, +\infty)$

Câu 3. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$

Chú ý: Công thức tính nhanh đạo hàm của hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$

$$y' = \frac{\begin{bmatrix} a & b \\ m & n \end{bmatrix} x^2 + 2\begin{bmatrix} a & c \\ m & p \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b & c \\ n & p \end{bmatrix}}{mx^2 + nx + p}$$

Cách giải:

$$y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$$

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} x^2 + 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(x+1)^2} = \frac{1x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y		↗		↘	‖	↘		↗	

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty, -2)$ và $(0, +\infty)$

Hàm số nghịch biến trên $(-2, -1)$ và $(-1, 0)$

Câu 4. (Đề minh họa 2, năm 2018) Cho hàm số có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	1	↗	4	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; +\infty)$ **B.** $(-1; 1)$ **C.** $(1; 4)$ **D.** $(0; \frac{1}{2})$

Cách giải:

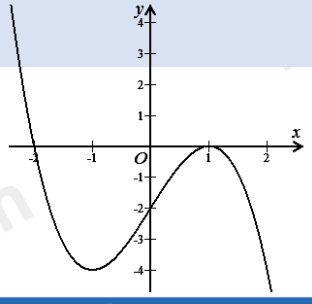
Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên $(0; \frac{1}{2})$.

Chọn D.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty, -1)$ **B.** $(-1, 1)$

C. $(0, +\infty)$ **D.** $(-\infty, +\infty)$



Cách giải:

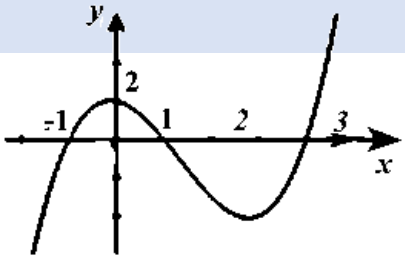
Từ BBT suy ra hàm số đồng biến trên $(-1, 1)$

Chọn B.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$ **B.** $(-1;2)$

C. $(1;2)$ **D.** $(2;+\infty)$



Cách giải:

Từ bảng biến thiên suy ra $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<1 \\ x>3 \end{array}\right.$

Suy ra hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Câu 7. (THPT Trần Hung Đạo - 2018) Trong các hàm số sau, hàm số nào luôn nghịch biến trên R?

A. $y=x^4+x^2+2017$ **B.** $y=x^3+3x^2+3x+2017$

C. $y=\sin x-x$ **D.** $y=\cot x$

Cách giải:

$y=x^3+3x^2+3x+2017$

$y'=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\geq 0$

Vậy hàm số $y=x^3+3x^2+3x+2017$ đồng biến trên R.

$y=\sin x-x \Rightarrow y'=\cos x-1\leq 0$ nên hàm số nghịch biến trên R

Câu 8. (Chuyên Thái Bình - 2018) Cho hàm số $y=\sin x-\cos x+\sqrt{3}x$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây:

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ **B.** Hàm số nghịch biến trên $(1;2)$

C. Hàm số là hàm lẻ **D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$

Cách giải:

Chú ý:

Hàm $y=A\sin x+B\cos x$ có tập xác định là $\left[-\sqrt{A^2+B^2};\sqrt{A^2+B^2}\right]$ tức là $-\sqrt{A^2+B^2}\leq y\leq \sqrt{A^2+B^2}$

Do đó $y'=\sqrt{3}+(\sin x+\cos x)\geq \sqrt{3}+\left(-\sqrt{1^2+1^2}\right)$

Hay $y'\geq \sqrt{3}-\sqrt{2}>0.$