BÀI GIẢNG: ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM (TIẾT 1)
CHUYÊN ĐỀ: ĐẠO HÀM
MÔN: TOÁN 11 (KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG)
GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

MỤC TIÊU

- ✓ *Nhận biết định nghĩa đạo hàm. Tính đạo hàm của một số hàm đơn giản bằng định nghĩa.*
- ✓ *Nhận biết ý nghĩa hình học của đạo hàm. Thiết lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm thuộc đồ thị.*
- ✓ *Vận dụng định nghĩa đạo hàm vào giải quyết một số bài toán thực tiễn.*

I. BÀI TOÁN MỞ ĐẦU

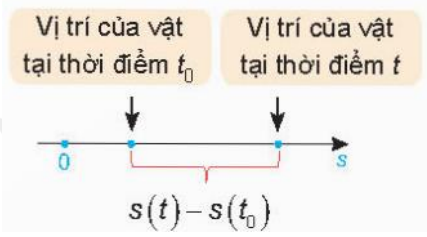
Nếu một quả bóng được thả rơi tự do từ đài quan sát trên sân thượng của toà nhà Landmark 81 (Thành phố Hồ Chí Minh) cao $461,3\text{m}$ xuống mặt đất. Có tính được vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất hay không? (Bỏ qua sức cản không khí).



II. MỘT SỐ BÀI TOÁN DẪN ĐẾN KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

1 Vận tốc tức thời của một vật chuyển động thẳng

HD1. Một vật di chuyển trên một đường thẳng (H.9.2). Quãng đường s của chuyển động là một hàm số của thời gian t, $s = s(t)$ (được gọi là phương trình của chuyển động).



a) Tính vận tốc trung bình của vật trong khoảng thời gian từ t_0 đến t.

b) Giới hạn $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ cho ta biết điều gì?

Cách giải:

a) Vận tốc trung bình của vật trong khoảng thời gian từ t_0 đến t là $v_{tb} = \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$

b) Khi t càng gần t_0, tức là $|t - t_0|$ càng nhỏ thì vận tốc trung bình càng thể hiện được chính xác hơn mức độ nhanh chậm của chuyển động tại thời điểm t_0.

2 Cường độ tức thời

HD2. Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian t, có dạng $Q = Q(t)$.

a) Tính cường độ trung bình của dòng điện trong khoảng thời gian từ t_0 đến t.

b) Giới hạn $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$ cho ta biết điều gì?

Cách giải:

a) Cường độ trung bình của dòng điện trong khoảng thời gian từ t t_0 đến t là $I_{tb} = \dfrac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$

b) Khi t càng gần t_0, tức là $|t - t_0|$ càng nhỏ thì cường độ trung bình càng thể hiện được chính xác hơn cường độ dòng điện tại thời điểm t_0.

Nhận xét. Nhiều bài toán trong Vật lí, Hoá học, Sinh học,... đưa đến việc tìm giới hạn dạng $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, ở đó $y = f(x)$ là một hàm số đã cho.

Giới hạn trên dẫn đến một khái niệm quan trọng trong Toán học, đó là khái niệm đạo hàm.

Ví dụ:

a)Tại thời điểm

$t_0 = 0(s); s_0 = 0(\text{m})$

$t_2 = 2(\text{s}); s = 10(\text{m})$

$\Rightarrow \bar{v} = \dfrac{s - s_0}{t - t_0} = \dfrac{10 - 0}{2 - 0} = 5(m/s)$

Ta gọi $\bar{v}$ là đạo hàm của quãng đường theo thời gian.

b) Tại thời điểm

$t_1 = 0(\text{s}); Q_1 = 10(\text{C})$

$t_2 = 0,01(\text{s}) \cdot Q_2 = 20(C)$

$\bar{i} \to i_{tt} = \dfrac{Q_2 - 01}{t_2 - t_1} = \dfrac{20 - 10}{0,01 - 0} = \dfrac{10}{0,01} = 1000(A)$

Ta gọi $\bar{i}$ là đạo hàm của điện lượng theo thời gian.

c) Cân ngày tại thời điểm

$t_1 = 1; m_1 = 50(\text{kg})$

$t_2 = 2; m_2 = 55(kg)$

$\dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \dfrac{55 - 50}{2 - 1} = 5(\text{kg/mg})$

$\Rightarrow$ Công cụ đo giá trị $\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$ chính là đạo hàm của khối lượng theo thời gian.

III. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0\in(a;b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu bởi $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Chú ý. Đề tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x_0\in(a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Tinh $f(x)-f(x_0)$.

2. Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ với $x\in(a;b), x\neq x_0$.

3. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)=x^2+2x$ tại điểm $x_0=1$.

Cách giải:

Ta có: $f(x)-f(1)=x^2+2x-3=x^2-1+2x-2=(x-1)(x+3)$.

Với $x\neq 1, \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=x+3$.

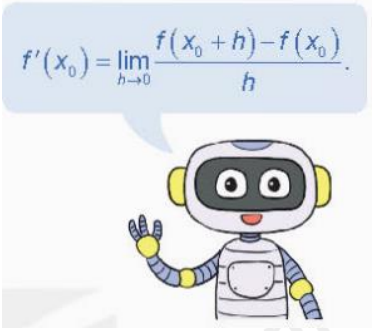
Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+3)=4$. Vậy $f'(1)=4$.

Trong thực hành, ta thường trình bày ngắn gọn như sau:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+2x\right)-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+3)=4$$

Chú ý. Đặt $h=x-x_0$, khi đó đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0=1$ có thể tính như sau:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(1+h)^2+2(1+h)\right]-\left(1^2+2\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(h^2+4h+3\right)-3}{h}=\lim_{h\to 0}(h+4)=4.$$



Luyện tập 1. Tính đạo hàm của hàm số $y=-x^2+2x+1$ tại điểm $x_0=-1$.

Cách giải:

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{-x^2+2x+1+2}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{-x^2+2x+3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(3-x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(3-x)=3+1=4$$

Vậy $f'(-1)=4$

IV. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT KHOẢNG

HĐ3. Tính đạo hàm $f(x_0)$ tại điểm x_0 bất kì trong các trường hợp sau:

a) $f(x)=c$ (c là hằng số);

b) $f(x)=x$.

Cách giải:

a) $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}0=0$

b) $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1$

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x thuộc khoảng đó, kí hiệu là $y'=f'(x)$.

Ngoài ra, hàm số có đạo hàm trên khoảng $[a;b]$ khi và chỉ khi

$f(x)$ có đạo hàm trên $(a;b)$

$f(x)$ có đạo hàm phải tại $x=a$

$f(x)$ có đạo hàm trái tại $x=b$

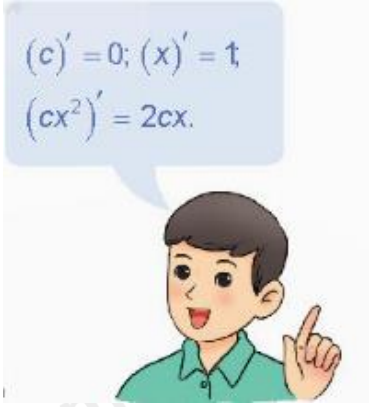
Ví dụ 2. Tìm đạo hàm của hàm số $y=cx^2$, với c là hằng số.

Cách giải:

Với x_0 bất kì, ta có:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{cx^2-cx_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}c(x+x_0)=c(x_0+x_0)=2cx_0.$$



Vậy hàm số $y=cx^2$ (với c là hằng số) có đạo hàm là hàm số $y'=2cx$.

Từ đó ta có công thức tổng quát $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1},\ n \in N^*$

Chú ý. Nếu phương trình chuyển động của vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t.

Công thức đạo hàm của vận tốc và cường độ dòng điện:

$$v_{tt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \Delta}{\Delta t} = s'(t)$$

$$i_{tt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Q'(t)$$

Suy ra $v'(t) = s''(t) = a$ (gia tốc)

Ví dụ:

+) $s(t) = 4t^2 + 2t + 39\,(\text{m})$

$\Rightarrow v(1) = 8t + 2.1 + 0 = 10(\text{m/s})$

+) $Q(t) = 3t + 2(C)$

$\Rightarrow I(2) = 3(A)$

Ví dụ 3. Giả bài toán trong tình huống mở đầu (bỏ qua sức cản của không khí và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Cách giải:

Phương trình chuyển động rơi tự do của quả bóng là $s = f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (g là gia tốc rơi tự do, lấy $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$). Do vậy, vận tốc của quả bóng tại thời điểm t là $v(t) = f'(t) = gt = 9{,}8t$.

Mặt khác, vì chiều cao của toà tháp là 461,3 nên quả bóng sẽ chạm đất tại thời điểm t_1, với $f(t_1) = 461{,}3$.

Từ đó, ta có:

$$4{,}9t_1^2 = 461{,}3 \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{461{,}3}{4{,}9}} \text{ (giây).}$$

Vậy vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất là:

$$v(t_1) = 9{,}8t_1 = 9{,}8 \cdot \sqrt{\frac{461{,}3}{4{,}9}} \approx 95{,}1(\text{m/s}).$$

Luyện tập 2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 + 1$;

b) $y = kx + c$ (với k, c là các hằng số).

Cách giải:

a) Với x_0 bất kì, ta có:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+1-\left(x_0^2+1\right)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0$$

Vậy hàm số $y=x^2+1$ có đạo hàm là hàm số $y'=2x$

b) Với x_0 bất kì, ta có:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{kx+c-(kx_0+c)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{kx-kx_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{k(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}k=k$$

Vậy hàm số $y=kx+c$ (với k,c là các hằng số) có đạo hàm là hàm số $y'=k$

Ví dụ: Tính đạo hàm bằng định nghĩa

a) $y=x^3;x_0=1$

b) $y=\sqrt{x};x_0=4$

c) $y=\frac{1}{x};x_0=-2$

Cách giải:

a)

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)=3$$

Theo CT: $\left(x^3\right)'=3x^2\Rightarrow f'(1)=3\cdot(1)^2=3$

b) $f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-2}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$

Theo CT: $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$

c) $f'(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{x}{2x(x+2)}=-\frac{1}{4}$

Theo CT: $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(-2)=-\frac{1}{(-2)^2}=-\frac{1}{4}$