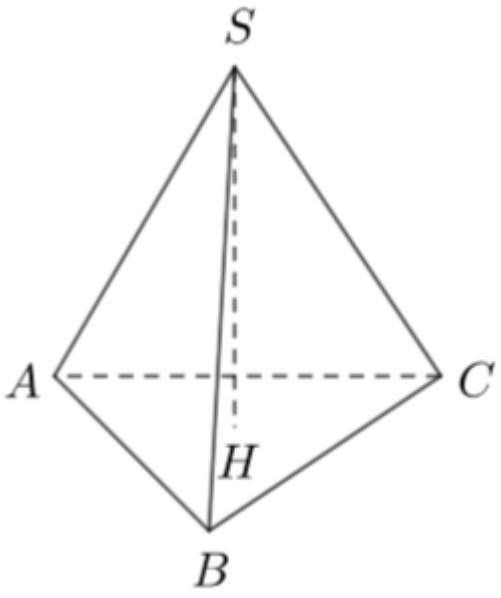
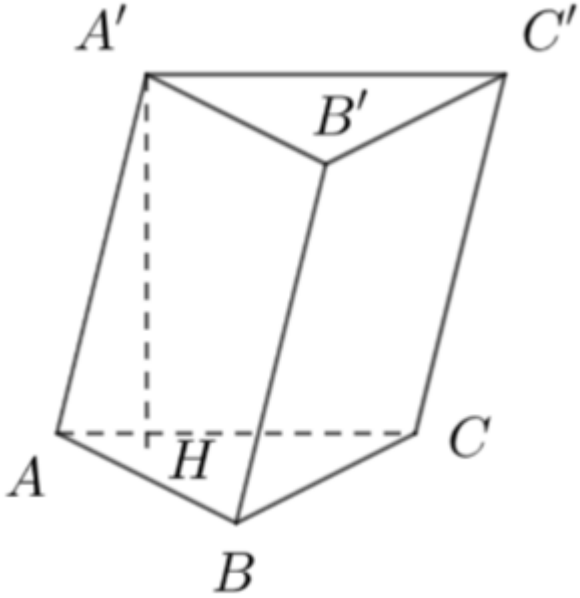
BÀI GIẢNG: KHOẢNG CÁCH (TIẾT 1)
CHUYÊN ĐỀ: QUAN HỆ VUÔNG GÓC. HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC
MÔN: TOÁN 11 CƠ BẢN & NÂNG CAO
GIÁO VIÊN: NGÔ VĂN TOẢN

MỤC TIÊU

- ✓ *Vẽ được hình chóp đều, lăng trụ đứng và chỉ ra được các tính chất của chúng.*
- ✓ *Phát biểu được khái niệm chiều cao của hình chóp, lăng trụ và xác định chiều cao của hình chóp, lăng trụ trong một số trường hợp thường gặp.*
- ✓ *Phát biểu được định nghĩa khoảng cách từ điểm đến đường thẳng, điểm đến mặt phẳng, hai đường thẳng chéo nhau, khoảng cách giữa các đối tượng song song.*

I. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1 Chiều cao của hình chóp, hình lăng trụ

	
SH vuông góc với đáy tại H Khi đó SH là chiều cao của hình chóp	$A'H$ vuông góc với đáy tại H Khi đó $A'H$ là chiều cao của hình chóp

2 Hình chóp đều, lăng trụ đứng

Bài toán: Hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$. Giả sử H là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC). Chứng minh rằng H là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC

Cách giải:

Xét các tam giác vuông $\Delta SHA, \Delta SHB, \Delta SHC$ có:

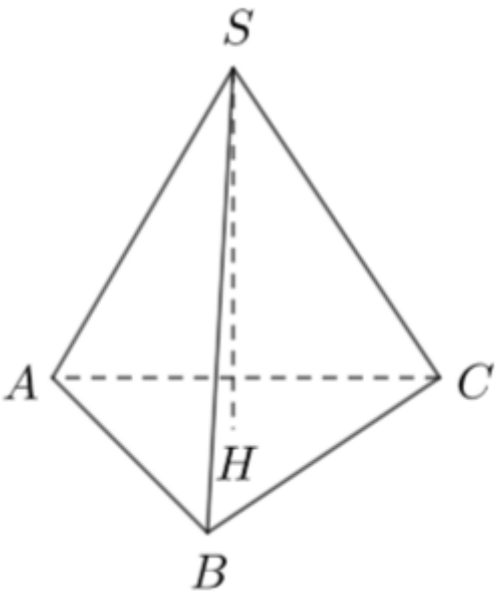
$SA = SB = SC$

SH *chung*

$\Rightarrow \Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$

$\Rightarrow HA = HB = HC$

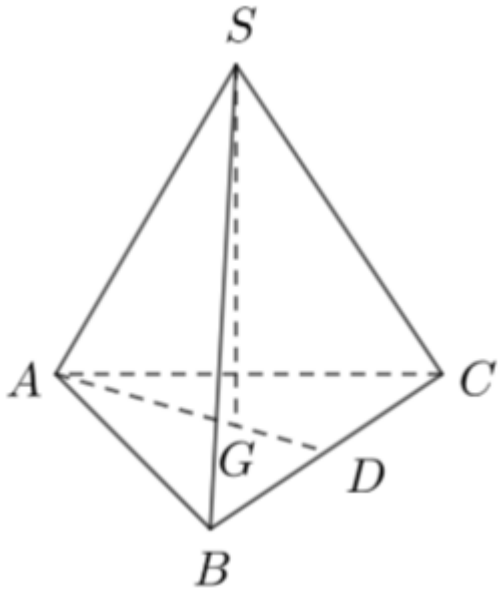
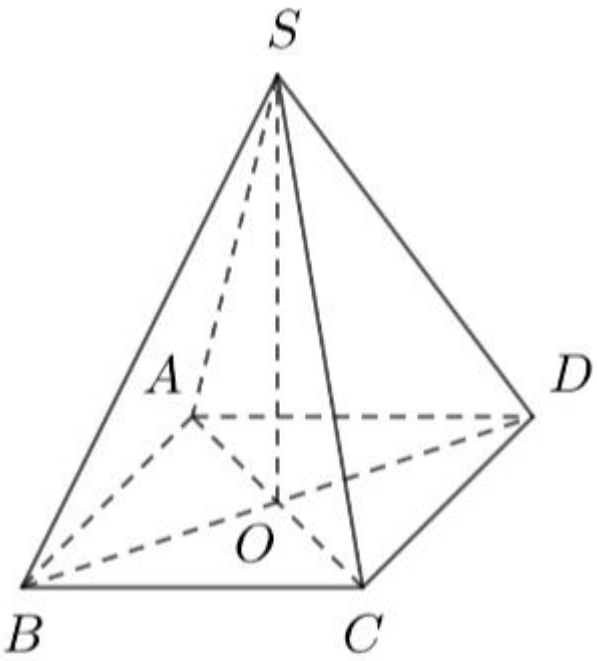
$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC



a. Hình chóp đều

Các tính chất của hình chóp đều:

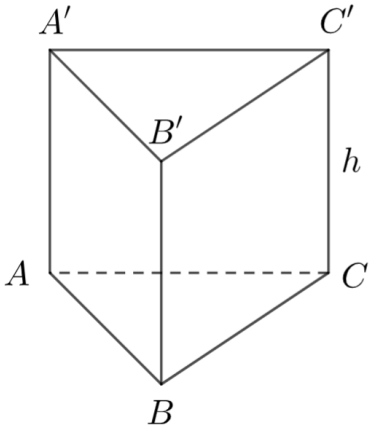
- Đáy là đa giác đều
- Các cạnh bên bằng nhau
- Chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy

Chóp tam giác đều	Chóp tứ giác đều
	
ΔABC đều $SA = SB = SC$ $SG \perp (ABC)$ (G là trọng tâm của ΔABC)	$ABCD$ là hình vuông $SA = SB = SC = SD$ $SO \perp (ABCD)$ với $O = AC \cap BD$

b. Hình lăng trụ đứng

Hình lăng trụ đứng = Hình lăng trụ + Cạnh bên vuông góc với đáy

Hình lăng trụ đều = Hình lăng trụ đứng + đáy là đa giác đều



3 Xác định chiều cao của hình chóp, lăng trụ thường gặp

1) Chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Khi đó $h = SA$

2) Chóp $S.ABCD$ có M là hình chiếu của S. Khi đó $SM \perp (ABCD) \Rightarrow h = SM$

3) Chóp $S.ABCD$ có mặt bên SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.

Kẻ $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

4) Chóp $S.ABCD$ có hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy

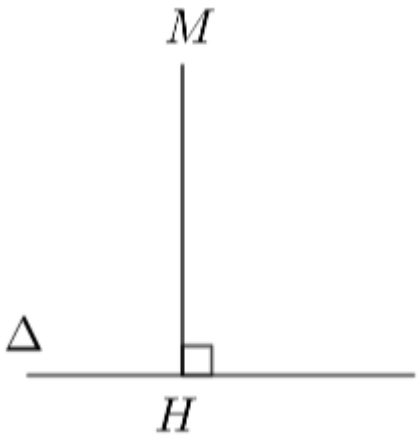
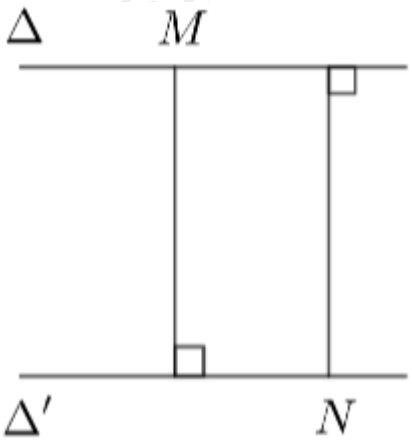
Ta có: $\left.\begin{array}{l}(SAB) \perp (ABCD)\\ (SAC) \perp (ABCD)\\ (SAB) \cap (SAC) = SA\end{array}\right\} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$

5) Chóp $S.ABC$ là chóp tam giác đều. Khi đó $h = SG$, G là trọng tâm đáy

6) Chóp $S.ABCD$ là chóp tứ giác đều. Khi đó $h = SO$, $O = AC \cap BD$

II. KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG, HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1 Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng

	
$MH \perp \Delta$ tại H Kí hiệu: $d(M,\Delta)$ là khoảng cách từ M $d(M,\Delta) = MH$	$d(\Delta,\Delta') = d(M \in \Delta,\Delta') = d(N \in \Delta',\Delta)$

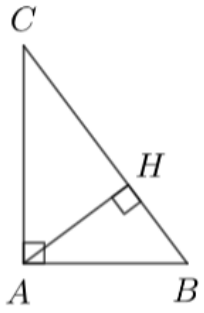
Ví dụ:

a) Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=6$, $AC=8$. Tính $d(A,BC)$

b) Cho tam giác ABC có $AB=AC=8$, $\angle BAC=120°$. Tính $d(A,BC)$

c) Cho tam giác ABC có $AB=6$, $AC=7$, $BC=9$. Tính $d(A,BC)$

d) Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A, D. Biết $AD=DC=4$, $AB=8$. Gọi H là trung điểm của AD. Tính $d(H,BC)$



Lời giải:

a) Kẻ $AH\perp BC\ (H\in BC)$. Khi đó $d(A,BC)=AH$

Ta có: $AH.BC=AB.AC\Rightarrow AH=\dfrac{AB.AC}{BC}=\dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2+AC^2}}=\dfrac{6.8}{\sqrt{6^2+8^2}}=4,8$

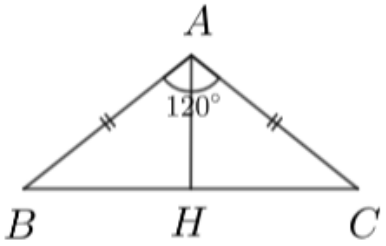
b) Kẻ $AH\perp BC\ (H\in BC)$. Khi đó $d(A,BC)=AH$

Ta có: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}8.8.\sin 120°=16\sqrt{3}$

Theo định lí cosin ta có:

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos\angle BAC=8^2+8^2-2.8.8.\cos 120°=192\Rightarrow BC=8\sqrt{3}$

Mặt khác: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AH.BC\Rightarrow AH=\dfrac{2S_{ABC}}{BC}=\dfrac{2.16\sqrt{3}}{8\sqrt{3}}=4$

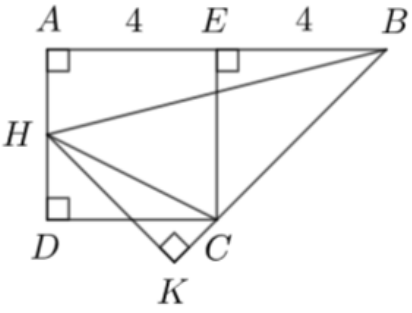


c) Kẻ $AH\perp BC\ (H\in BC)$. Khi đó $d(A,BC)=AH$

Ta có: $S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=2\sqrt{110}$

Mặt khác: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AH.BC\Rightarrow AH=\dfrac{2S_{ABC}}{BC}=\dfrac{2.2\sqrt{110}}{9}=\dfrac{4\sqrt{110}}{9}$

d) Kẻ $CE\perp AB\ (E\in AB)$, $HK\perp BC\ (K\in BC)$



Khi đó $CE=4$, $EB=4\Rightarrow BC=\sqrt{CE^2+EB^2}=4\sqrt{2}$

Ta có: $S_{HBC}=S_{ABCD}-S_{HAB}-S_{HDC}=\dfrac{(AB+CD)AD}{2}-\dfrac{AH.AB}{2}-\dfrac{HD.DC}{2}$

$=\dfrac{(6+2).4}{2}-\dfrac{2.8}{2}-\dfrac{2.4}{2}=4$

$\Rightarrow HK=\dfrac{2S_{HBC}}{BC}=\dfrac{2.4}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

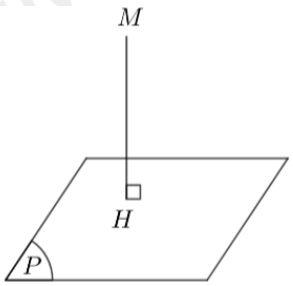
Vậy $d(H,BC)=HK=\sqrt{2}$.

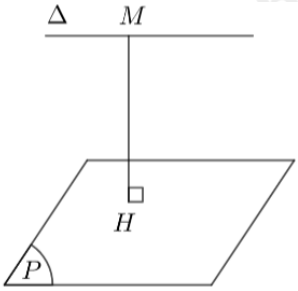
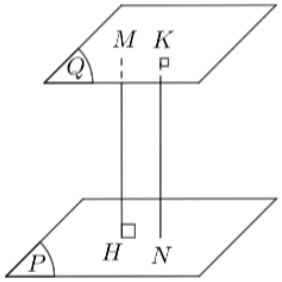
III. KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC ĐỐI TƯỢNG SONG SONG

1 Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng

$MH \perp (P)$ tại H

Khi đó $d(M,(P)) = MH$



	
$\Delta \parallel (P)$ $d(\Delta,(P) = d(M \in \Delta,(P)))$	$(P) \parallel (Q)$ $d((P),(Q)) = d(M \in (Q),(P)) = d(N \in (P),(Q))$

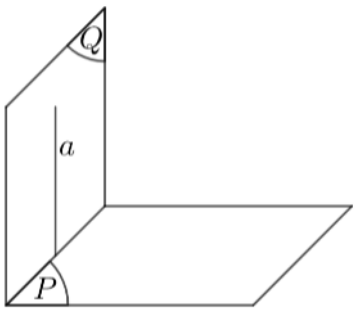
Phương pháp xác định $d(M,(P))$:

Cách 1 (Trực tiếp): Xác định hình chiếu của M trên (P).

1) Dựng (Q) đi qua M và $(Q) \perp (P)$

2) Xác định $\Delta = (Q) \cap (P)$

3) Kẻ $MH \perp \Delta \Rightarrow MH \perp (P) \Rightarrow d(M,(P)) = MH$

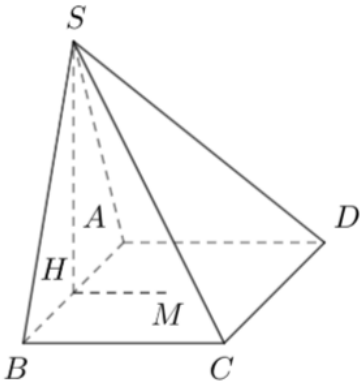


Các trường hợp:

TH1: Khoảng cách giữa đỉnh và đáy chính là chiều cao của khối chóp

TH2: Khoảng cách giữa điểm thuộc mặt đáy và mặt đứng:

Ta có: $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases}$



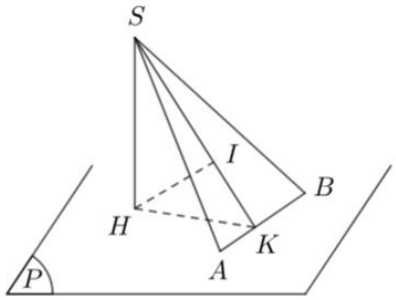
Kẻ $MH \perp AB$ tại H. Khi đó $MH \perp (SAB) \Rightarrow d(M,(SAB)) = MH$

TH3: Khoảng cách giữa điểm thuộc mặt đáy và mặt xiên:

Ta có: $(SAB)\cap(ABCD)=AB$

Kẻ $HK\perp AB\ (K\in AB)\Rightarrow (SHK)\perp(SAB)=HK$

Kẻ $HI\perp SK\ (I\in SK)\Rightarrow HI\perp(SAB)$



Các bước tính $d\left(M,(P)\right)$ bằng cách trực tiếp:

Bước 1. Xác định chiều cao của hình chóp, lăng trụ

Bước 2. Kiểm tra (P) thuộc loại nào (đáy, đứng, xiên)?

Kiểm tra điểm M có thuộc điểm tương ứng với loại mặt phẳng theo ba trường hợp không?

Bước 3. Xác định khoảng cách theo một trong ba trường hợp

Ví dụ: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Tính

a) $d\left(S,(ABCD)\right)$

b) $d\left(C,(SAB)\right)$, $d\left(O,(SAD)\right)$

c) $d\left(A,(SBC)\right)$, $d\left(A,(SBD)\right)$

d) $d\left(D,(SBC)\right)$, $d\left(C,(SBD)\right)$

Lời giải:

a) Ta có: $SA\perp(ABCD)\Rightarrow d\left(S,(ABCD)\right)=SA=a$

b) Ta có: $\left.\begin{array}{l}SA\perp(ABCD)\\SA\subset(SAB)\end{array}\right\}\Rightarrow(SAB)\perp(ABCD)=AB$

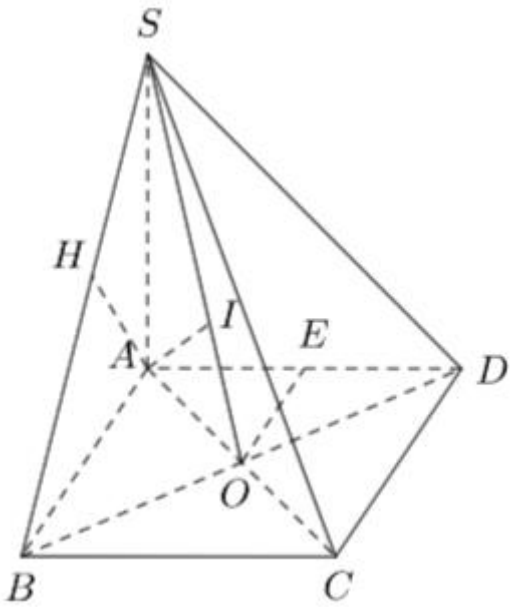
Lại có: $CB\perp AB\Rightarrow CB\perp(SAB)\Rightarrow d\left(C,(SAB)\right)=CB=a$

Tương tự ta chứng minh được $(SAD)\perp(ABCD)=AD$

Trong $(ABCD)$, kẻ $OE\perp AD$ tại E

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $OE=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{a}{2}$

Khi đó $OE\perp(SAD)\Rightarrow d\left(O,(SAD)\right)=OE=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{a}{2}$



c) Ta có: $(SBC)\cap(ABCD)=BC$

Lại có: $\left.\begin{array}{l}AB\perp BC\\SA\perp BC\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow(SAB)\perp(SBC)$

Trong (SAB) kẻ $AH\perp SB$ tại H

Khi đó $AH\perp(SBC)\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right)=AH$

Xét $\Delta SAB: AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}} = \dfrac{a.a}{\sqrt{a^2+a^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có: $(SBD)\cap(ABCD) = BD$

Lại có: $\left.\begin{matrix} OA\perp BD \\ SA\perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD\perp(SOA) \Rightarrow (SAO)\perp(SBD) = SO$

Trong (SAO), kẻ $AI\perp SO \Rightarrow AI\perp(SBD)$

Do đó $d\left(A,(SBD)\right) = \dfrac{SA.AO}{\sqrt{SA^2+AO^2}} = \dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

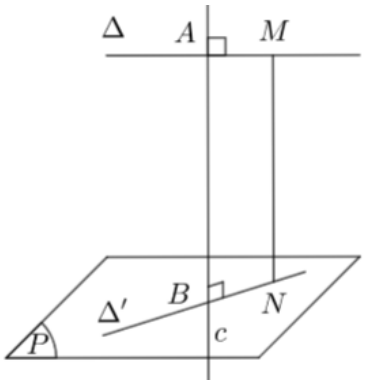
d) Ta có: $AD\parallel(SBC) \Rightarrow d\left(D,(SBC)\right) = d\left(A,(SBC)\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Lại có: $AC\cap(SBD) = O \Rightarrow \dfrac{d\left(C,(SBD)\right)}{d\left(A,(SBD)\right)} = \dfrac{OC}{OA} = 1$

$\Rightarrow d\left(C,(SBD)\right) = d\left(A,(SBD)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

III. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

1 Định nghĩa



Đường thẳng c thỏa mãn vuông góc và cắt cả hai đường thẳng Δ, Δ'

Khi đó c là đường vuông góc chung của Δ, Δ'

Giả sử $\begin{cases} c\cap\Delta = A \\ c\cap\Delta' = B \end{cases} \Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung của Δ, Δ'

Khoảng cách giữa Δ và Δ' bằng độ dài đoạn AB

Kí hiệu $d\left(\Delta,\Delta'\right) = AB$

Nhận xét: Cho Δ và Δ' là hai đường thẳng chéo nhau. Khi đó có (P) chứa Δ' và $(P)\parallel\Delta$

Khi đó $d\left(\Delta,\Delta'\right) = d\left(H\in\Delta,(P)\right)$

2 Cách tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Tìm $d\left(\Delta,\Delta'\right)$ với Δ, Δ' chéo nhau

Bước 1: Kiểm tra $\Delta\perp\Delta'$

Bước 2:

- Nếu $\Delta \perp \Delta'$. Ta dựng (P) chứa Δ' và $(P) \| \Delta$. Khi đó $d(\Delta, \Delta') = d(M \in \Delta, (P))$

- Nếu $\Delta \perp \Delta'$. Ta dựng (P) chứa Δ' và $(P) \perp \Delta$. Tìm $A = \Delta \cap (P)$

Kẻ $AB \perp \Delta'$. Khi đó AB là đoạn vuông góc chung của Δ, Δ'

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính

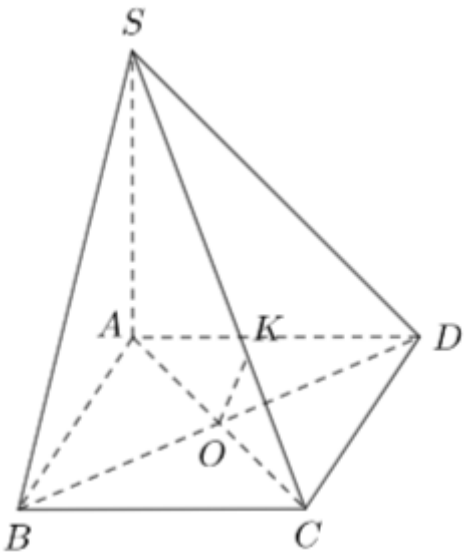
a) $d(SA, BD)$

b) $d(BD, SC)$

c) $d(SB, CD)$

d) $d(SB, AC)$

Lời giải:



a) Gọi $O = AC \cap BD$

Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \\ SA \cap (ABCD) = A \\ AO \perp BD \end{cases}$

$\Rightarrow AO$ là đoạn vuông góc chung của SA và BD

$\Rightarrow d(SA, BD) = AO = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

b) Ta có: $BD \cap (SAC) = O$

Kẻ $OK \perp SC$ $(K \in SC)$

Khi đó OK là đoạn vuông góc chung của BD, SC

$\Rightarrow d(BD, SC) = OK$

Ta có: $\Delta COK \sim \Delta CSA$ $(g.g) \Rightarrow \frac{OK}{SA} = \frac{OC}{CS} \Rightarrow OK = \frac{SA.OC}{SC} = \frac{SA.\frac{1}{2}AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{10}}{5}$

Vậy $d(BD, SC) = \frac{a\sqrt{10}}{5}$

c) Ta có: $\left.\begin{matrix} CD \| AB \subset (SAB) \\ CD \not\subset (SAB) \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \| (SAB)$

$\Rightarrow d(CD, SB) = d(CD, (SAB)) = d(C, (SAB))$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow d(C, (SAB)) = CB = a$

Vậy $d(CD,SB)=a$

d) Trong $(ABCD)$, kẻ đường thẳng Δ đi qua B và $\Delta \parallel AC$

Gọi $(Q)=(\Delta,SB)$. Khi đó $AC\parallel(Q)\Rightarrow d(AC,SB)=d(AC,(Q))=d(A,(Q))$

Kẻ $AH\perp\Delta\ (H\in\Delta)$

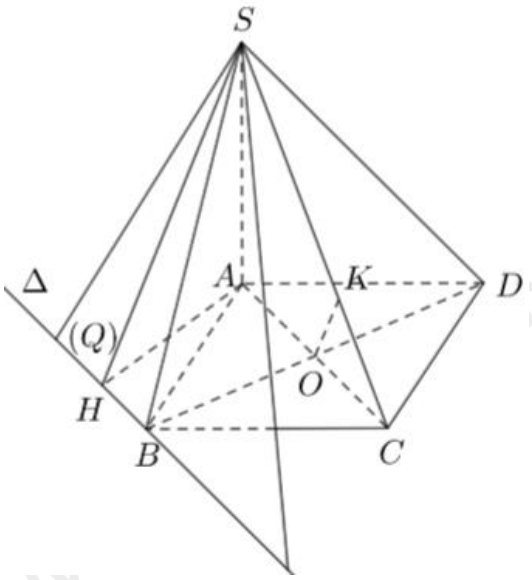
Khi đó $(SAH)\perp(Q)=SH$

Kẻ $AI\perp SH\ (I\in SH)\Rightarrow AI\perp(Q)$

$\Rightarrow d(AC,SB)=d(A,(Q))=AI=\dfrac{SA.AH}{\sqrt{SA^2+AH^2}}$

Ta có: $ABCD$ là hình vuông nên $\angle BAC=45^\circ\Rightarrow\angle HBA=45^\circ$

Do đó ΔAHB vuông cân tại $H\Rightarrow AH=\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$



Khi đó $d(AC,SB)=\dfrac{2a.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{4a^2+\dfrac{a^2}{2}}}=\dfrac{2a}{3}$

Vậy $d(AC,SB)=\dfrac{2a}{3}$

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M là trung điểm của $B'C'$. Tính:

a) $d(AA',BC)$

b) $d(AB',BC')$

c) $d(AB',A'M)$

Lời giải:

a) Ta có: $AA'\perp(ABC)$ chứa BC

Kẻ $AH\perp BC\ (H\in BC)$

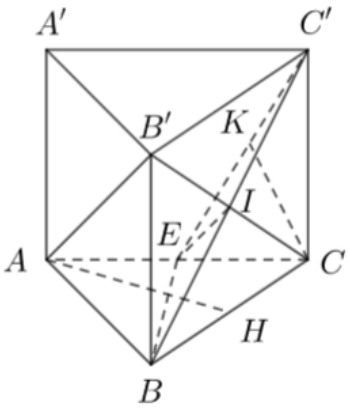
Khi đó AH là đoạn vuông góc chung của AA' và BC

$\Rightarrow d(AA',BC)=AH$

ΔABC đều, AH là đường cao nên H là trung điểm của BC

$\Rightarrow AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow d(AA',BC)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



b) Gọi $I=B'C\cap BC'$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của BC' và $B'C$

Gọi E là trung điểm của AC

$\Rightarrow IE$ là đường trung bình của $\Delta AB'C$

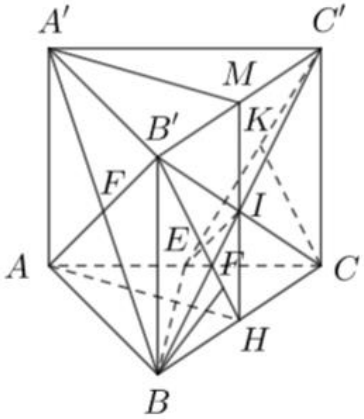
$\Rightarrow IE \parallel AB' \Rightarrow AB' \parallel (BEC')$

$\Rightarrow d(AB', BC') = d(AB', (BEC')) = d(A, (BEC'))$

Ta có: $AC \cap (BEC') = E \Rightarrow \dfrac{d(A, (BEC'))}{d(C, (BEC'))} = \dfrac{EA}{EC} = 1 \Rightarrow d(A, (BEC')) = d(C, (BEC'))$

Lại có: $\left.\begin{matrix} CC' \perp BE \\ BE \perp EC \end{matrix}\right\} \Rightarrow (CC'E) \perp BE \Rightarrow (CC'E) \perp (BEC')$

Kẻ $CK \perp C'E$ $(K \in C'E) \Rightarrow CK \perp (BEC') \Rightarrow CK = d(C, (BEC'))$



Ta có: $CK = \dfrac{CE.CC'}{\sqrt{CE^2 + CC'^2}} = \dfrac{\frac{a}{2}.a}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

Vậy $d(AB', BC') = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

c) Ta có: $\begin{cases} MH \parallel AA' \\ MH = AA' \end{cases} \Rightarrow A'MHA$ là hình bình hành

Khi đó $AM \parallel AH \subset (AB'H)$

Mà $A'M \not\subset (AB'H) \Rightarrow A'M \parallel (AB'H)$

$\Rightarrow d(A'M, AB') = d(A'M, (AB'H)) = d(A', (AB'H))$

Gọi $F = A'B \cap AB' \Rightarrow F = AB' \cap (AB'H)$

Khi đó $\dfrac{d(A', (AB'H))}{d(B, (AB'H))} = \dfrac{FA'}{FB} = 1 \Rightarrow d(A', (AB'H)) = d(B, (AB'H))$

Ta có: $\left.\begin{matrix} BB' \perp AH \\ AH \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp (BB'C) \Rightarrow (AB'H) \perp (BB'C)$

Kẻ $BT \perp B'H$ $(T \in B'H) \Rightarrow BT \perp (AB'H) \Rightarrow d(B, (AB'H)) = BT$

Ta có: $BT = \dfrac{BB'.BH}{\sqrt{BB'^2 + BH^2}} = \dfrac{a.\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

Vậy $d(A'M, AB') = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$