BÀI GIẢNG: CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM (TIẾT 1)
CHUYÊN ĐỀ: ĐẠO HÀM
MÔN: TOÁN 11 (KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG)
GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

MỤC TIÊU

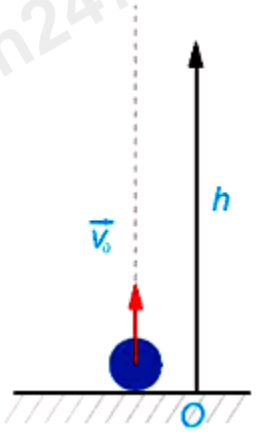
- ✓ *Tính đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản.*
- ✓ *Sử dụng các công thức tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số và đạo hàm của hàm số hợp.*
- ✓ *Vận dụng các quy tắc đạo hàm để giải quyết một số bài toán thực tiễn.*

I. BÀI TOÁN MỞ ĐẦU

Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $v_0 = 20\,\text{m/s}$. Trong Vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao h so với mặt đất (tính bằng mét) của vật tại thời điểm t (giây) sau khi phóng được cho bởi công thức sau:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

trong đó v_0 là vận tốc ban đầu của vật, $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$ là gia tốc rơi tự do. Hãy tính vận tốc của vật khi nó đạt độ cao cực đại và khi nó chạm đất.



II. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

1 Đạo hàm của hàm số $y = x^n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

HD1. Nhận biết đạo hàm của hàm số $y = x^n$

a) Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3$ tại điểm x bất kì.

b) Dự đoán công thức đạo hàm của hàm số $y = x^n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$.

Cách giải:

a) Với x_0 bất kì, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\left(x^2 + xx_0 + x_0^2\right)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(x^2 + xx_0 + x_0^2\right) = 3x_0^2$$

Vậy hàm số $y = x^3$ có đạo hàm là hàm số $y' = 3x^2$

$(x)' = 1; (x^2)' = 2x.$



b) $y' = \left(x^n\right)' = nx^{n-1}$

> Hàm số $y = x^n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.

Mở rộng: nếu $n \in \mathbb{R}$ thì hàm số có đạo hàm $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ với $\forall x > 0$

Ví dụ:

$y = x^5 \to y' = 5x^4$

$y = \dfrac{1}{x^5} = x^{-5} \to y' = -5x^{-6} = \dfrac{-5}{x^6}$

$y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$\Rightarrow y' = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{x^{2/3}} = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

2 Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

HĐ2. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x > 0$.

Cách giải:

Với x_0 bất kì, ta có:

$$f'\left(x_0\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Vậy hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm là hàm số $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

> Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại các điểm $x = 4$ và $x = \dfrac{1}{4}$.

Cách giải:

Với mọi $x \in (0; +\infty)$, ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Do đó $y'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$ và $y'\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{4}}} = 1$.

HĐ3. Nhận biết quy tắc đạo hàm của tổng

a) Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 + x^2$ tại điểm x bất kì.

b) So sánh: $\left(x^3+x^2\right)'$ và $\left(x^3\right)'+\left(x^2\right)'$.

Cách giải:

a) Với x_0 bất kì, ta có:

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^3+x^2-x_0^3-x_0^2}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(x-x_0\right)\left(x^2+xx_0+x_0^2\right)+\left(x-x_0\right)\left(x+x_0\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(x^2+xx_0+x_0^2+x+x_0\right)=3x_0^2+2x_0$$

Vậy hàm số $y=x^3+x^2$ có đạo hàm là hàm số $y'=3x^2+2x$

b) $\left(x^3\right)'+\left(x^2\right)'=3x^2+2x$

Do đó $\left(x^3+x^2\right)'=\left(x^3\right)'+\left(x^2\right)'$.

Giả sử các hàm số $u=u(x),v=v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Khi đó

$$(u+v)'=u'+v';\quad (u-v)'=u'-v';$$

$$(uv)'=u'v+uv';\quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v=v(x)\neq 0).$$

Chú ý:

- Quy tắc đạo hàm của tổng, hiệu có thể áp dụng cho tổng, hiệu của hai hay nhiều hàm số.

- Với k là một hằng số, ta có: $(ku)'=ku'$.

- Đạo hàm của hàm số nghịch đảo: $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}(v=v(x)\neq 0)$.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x+1$

b) $y=\frac{2x+1}{x-1}$.

Cách giải:

a) Ta có:

$$y'=\frac{1}{3}\left(x^3\right)'-\left(x^2\right)'+2(x)'+1'$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 3x^2-2x+2$$

$$=x^2-2x+2$$

b) Với mọi $x\neq 1$, ta có:

$$y' = \frac{(2x+1)'(x-1)-(2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= -\frac{3}{(x-1)^2}.$$

Ví dụ 3. Giải bài toán trong tình huống mở đầu.

Cách giải:

Phương trình chuyển động của vật là $h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$.

Vận tốc của vật tại thời điểm t được cho bởi $v(t) = h' = v_0 - gt$.

Vật đạt độ cao cực đại tại thời điểm $t_1 = \frac{v_0}{g}$, tại đó vận tốc bằng $v(t_1) = v_0 - gt_1 = 0$. Vật chạm đất tại thời điểm t_2 mà $h(t_2) = 0$ nên ta có:

$v_0 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = 0 \Leftrightarrow t_2 = 0$ (loại) và $t_2 = \frac{2v_0}{g}$.

Khi chạm đất, vận tốc của vật là $v(t_2) = v_0 - gt_2 = -v_0 = -20(\text{m/s})$.

Dấu âm của $v(t_2)$ thể hiện độ cao của vật giảm với vận tốc $20\,\text{m/s}$ (tức là chiều chuyển động của vật ngược với chiều dương đã chọn).

Luyện tập 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$;

b) $y = (\sqrt{x}+1)(x^2+2)$

Cách giải:

a) $y' = \frac{(\sqrt{x})'(x+1)-\sqrt{x}(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$

b) $y' = (\sqrt{x}+1)'(x^2+2)+(\sqrt{x}+1)(x^2+2)' = \frac{x^2+2}{2\sqrt{x}}+(\sqrt{x}+1).2x$