BÀI GIẢNG: TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ TIẾT 2
CHUYÊN ĐỀ: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ.
MÔN: TOÁN 12 (KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG)

GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

MỤC TIÊU

- ✓ *Nhận biết điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số thông qua bảng biến thiên hoặc thông qua hình ảnh hình học của đồ thị hàm số.*

II. CỰC TRỊ HÀM SỐ

1 Khái niệm cực trị của hàm số

HĐ4: Nhận biết khái niệm cực đại, cực tiểu của hàm số

Quan sát đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ (H.1.7). Xét dấu đạo hàm của hàm số đã cho và hoàn thành các bảng sau vào vở:

x	-3		-2		-1
y'		?	0	?	
y		-4	?		-2

x	-1		0		1
y'		?	0	?	
y	-2		?		0

Cách giải:

x	-3		-2		-1
y'		+	0	−	
y		-4	0		-2

x	-1		0		1
y'		−	0	+	
y	-2		-4		0

Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

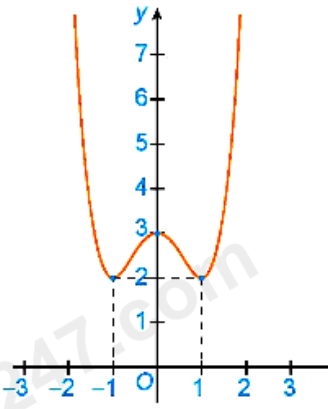
Chú ý:

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là $f_{CĐ}$ hay $y_{CĐ}$. Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

- Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT}. Điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

- Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.

Ví dụ 5. Hình 1.8 là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Hãy tìm các cực trị của hàm số.



Hình 1.8

Cách giải:

Từ đồ thị hàm số, ta có:

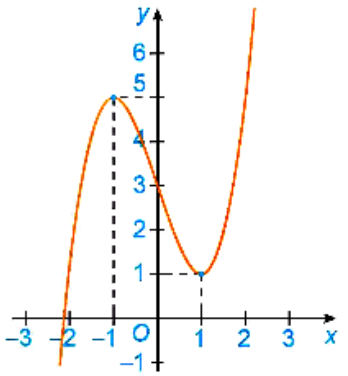
Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ và $y_{CT}=y(-1)=2$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CE}=y(0)-3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x-1$ và $y_{cT}=y(1)=2$.

Luyện tập 4. Hình 1.9 là đồ thị của hàm số $y=f(x)$.

Hãy tìm các cực trị của hàm số.



Hình 1.9

Cách giải:

Từ đồ thị hàm số, ta có:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và $y_{CT}=y(1)=1$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và $y_{CD}=y(-1)=5$

2 Cách tìm cực trị của hàm số

HĐ5: Nhận biết cách tìm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+1$.

a) Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm các điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số.

c) Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị của hàm số.

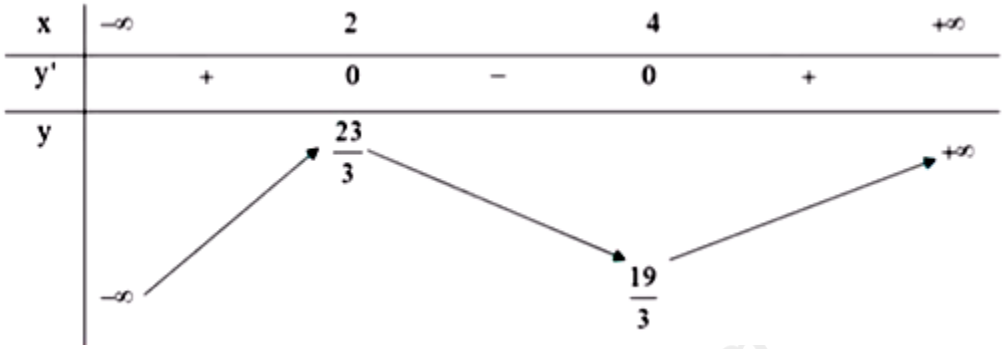
Cách giải:

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$y'=x^2-6x+8, y'=0\Leftrightarrow x^2-6x+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=2\end{array}\right.$$

Vậy $x=4;x=2$ thì $f'(x)=0$

b) Bảng biến thiên:



c) Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+1$ có điểm cực đại là $\left(2;\frac{23}{3}\right)$.

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+1$ có điểm cực tiểu là $\left(4;\frac{19}{3}\right)$.

Định lí:

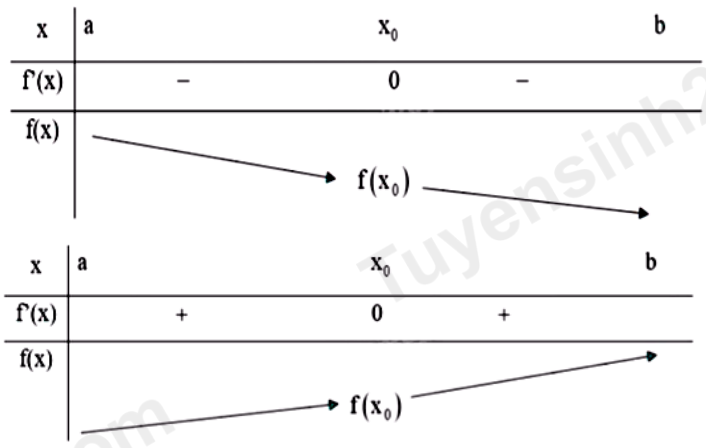
Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó:

a) Nếu $f'(x)<0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

b) Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Giải thích vì sao nếu $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_9 không phải là điểm cực trị của hàm số

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng (a ; b) chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Nếu f(x) không đổi dấu qua x_0 thì:



Do đó, x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số f(x).

Định lí trên được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(x_0)$ (Cực tiểu)	↗	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(x_0)$ (Cực đại)	↘	

Chú ý. Từ định lí trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y=f(x)$ như sau:

1. Tìm tập xác định của hàm số.

2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.

3. Lập bảng biến thiên của hàm số.

4. Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

Ví dụ 6. Tìm cực trị của hàm số $y=x^3-6x^2+9x+30$.

Cách giải:

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-12x+9; y'=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=3$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

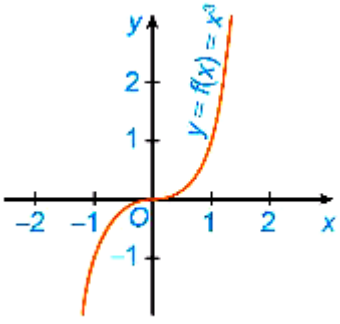
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	34	↘	30	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và $y_{co}=y(1)=34$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ và $y_{CT}=y(3)=30$.

Chú ý. Nếu $f'(x_0)=0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số. Chẳng hạn, hàm số $f(x)=x^3$ có $f'(x)=3x^2, f'(0)=0$, nhưng $x=0$ không phải là điểm cực trị của hàm số



Hình 1.10

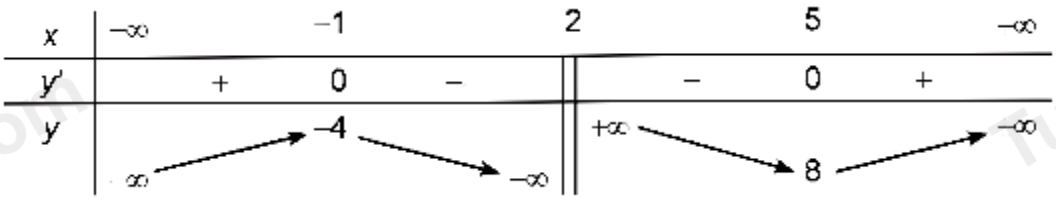
Ví dụ 7. Tìm cực trị của hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+9}{x-2}$.

Cách giải:

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{(2x-2)(x-2)-\left(x^2-2x+9\right)}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}; y'=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=5$.

Lập báng biến thiên của hàm số:



Từ bảng biến thiện, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và $y_{C\Theta}=y(-1)=-4$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=5$ và $y_{OT}=y(5)=8$.

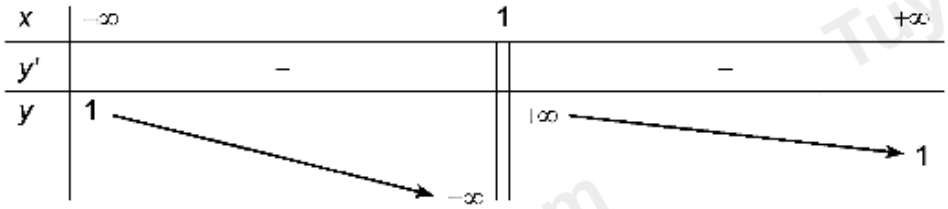
Ví dụ 8. Tìm cực trị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Cách giải:

Tập xác định của hàm sớ là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0$, với mọi $x\neq 1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:



Tử bảng biến thiên suy ra hàm sớ không có cực trị.

Luyện tập 5. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=x^4-3x^2+1$;

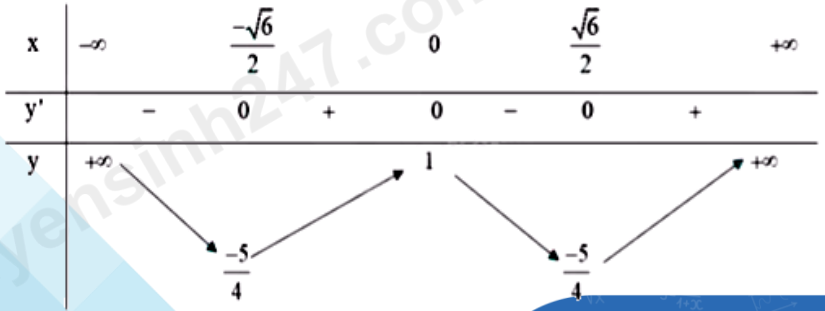
b) $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$.

Cách giải:

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=4x^3-6x, y'=0\Leftrightarrow 4x^3-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có:

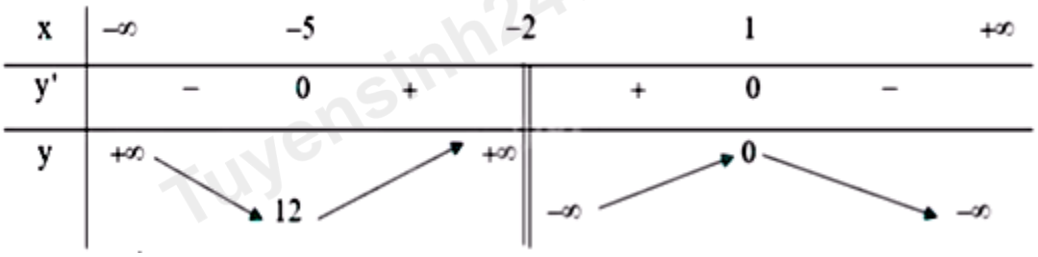
Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và .

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ và $y_{CT}=\dfrac{-5}{4}$.

b) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{(-2x+2)(x+2)-\left(-x^2+2x-1\right)}{(x+2)^2}=\dfrac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2}$ $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\\x=1\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Lập bảng biến thiên của hàm số:



Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và .

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-5$ và $y_{CT}=12$.

Vận dụng 2. Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao $2\,\text{m}$ với vận tốc ban đầu là $24{,}5\,\text{m/s}$.

Trong Vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức $h(t)=2+24{,}5t-4{,}9t^2$. Hỏi tại thời điểm nào thì vật đạt độ cao lớn nhất?

Cách giải:

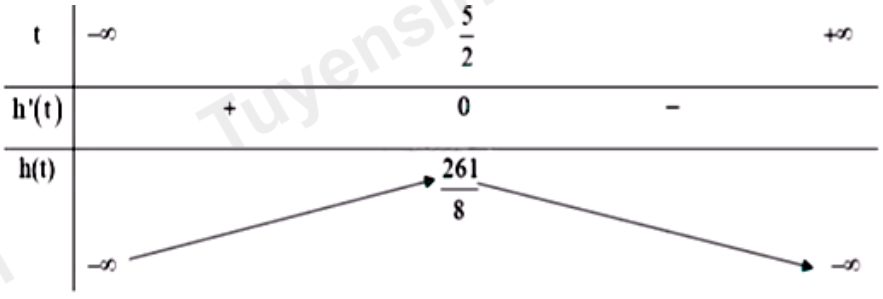
Xét hàm số: $h(t)=2+24{,}5t-4{,}9t^2$.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có:

$h'(t)=-9{,}8t+24{,}5;h'(t)=0\Leftrightarrow-9{,}8t+24{,}5=0\Leftrightarrow t=\dfrac{5}{2}$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $t=\dfrac{5}{2}$,

Vậy thời điểm vật đạt độ cao lớn nhất là $t=\dfrac{5}{2}$ giây