BÀI GIẢNG: TIẾP TUYẾN CỦA HÀM SỐ
CHUYÊN ĐỀ: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ
MÔN: TOÁN 12
GIÁO VIÊN: NGUYỄN HOÀNG TÙNG

MỤC TIÊU

- ✓ *Nắm được khái niệm đường tiếp tuyến của đồ thị hàm số, sự tiếp xúc của hai đồ thị.*
- ✓ *Hiểu được ý nghĩa của đạo hàm liên quan đến hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm.*
- ✓ *Biết cách viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị khi biết điểm tiếp xúc, biết trước hệ số góc và tiếp tuyến đi qua điểm cho trước.*

I. LÝ THUYẾT

BÀI TOÁN 1. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ tại điểm x_0

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) \quad (1)$$

BÀI TOÁN 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ khi biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng k

Bước 1 : Giải phương trình $f'(x) = k$ (x_0 là hoành độ tiếp điểm) => tìm được x_0

Bước 2 : Thay x_0 vào phương trình (1) từ đó ta có phương trình tiếp tuyến

BÀI TOÁN 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A, y_A)$

Bước 1 : Thay tọa độ điểm A vào phương trình (1), tìm được x_0

Bước 2 : Thay x_0 vào phương trình (1) từ đó ta có phương trình tiếp tuyến

ĐỀ BÀI

Dạng 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi biết tiếp điểm

Câu 1: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - x - 2$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là :

A. $x - y - 3 = 0$ **B.** $x - y - 1 = 0$ **C.** $2x - y - 4 = 0$ **D.** $2x - y = 0$

Câu 2: Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giac điểm của (C) với trục Ox là:

A. $y = 3x$ **B.** $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$ **C.** $y = x - 3$ **D.** $y = 3x - 3$

Câu 3: Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^3 + 3x^2 + 1$ tại điểm $A(1;5)$ và B là giao điểm thứ hai của tiếp tuyến với đồ thị hàm số. Khi đó diện tích tam giác OAB bằng :

A. $S=15$ **B.** $S=12$ **C.** $S=24$ **D.** $S=6$

Dạng 2: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi biết hệ số góc

Câu 1: Cho hàm số có đồ thị (C) $y=\frac{x^3}{3}+3x^2-2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=-9$.

A. $y=-9(x+3)$ **B.** $y+16=-9(x+3)$ **C.** $y-16=-9(x-3)$ **D.** $y-16=-9(x+3)$

Câu 2: Cho hàm số có đồ thị (C) $y=x^3-3x^2+5x-2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

A. $y=-2x$ **B.** $y=2x-1$ **C.** $y=-2x+1$ **D.** $y=2x-2$

Câu 3: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ (C). Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến đó cắt trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B thỏa mãn $OA=40B$ là:

A. $\frac{-1}{4}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{-1}{4}$ và $\frac{1}{4}$ **D.** 1

Câu 4: Cho hàm số $y=\frac{2x+3}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm các điểm M thuộc đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $y=4x+7$

A. $M\left(2,\frac{7}{3}\right)$ hoặc $M\left(3,\frac{9}{4}\right)$ **B.** $M\left(-3,\frac{3}{2}\right)$ hoặc $M\left(2,\frac{7}{3}\right)$

C. $M\left(1,\frac{5}{2}\right)$ hoặc $M\left(-3,\frac{3}{2}\right)$ **D.** $M\left(1,\frac{5}{2}\right)$ hoặc $M\left(3,\frac{9}{4}\right)$

Câu 5: Cho hàm số $y=x^4-2x^2+3x+1$ có đồ thị (C). Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y=3x+2018$

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi biết tiếp điểm

Câu 1: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - x - 2$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là :

A. $x - y - 3 = 0$ **B.** $x - y - 1 = 0$ **C.** $2x - y - 4 = 0$ **D.** $2x - y = 0$

Cách giải:

$d : y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$

$y(x_0) = y(1) = -2$

$y' = 2x - 1 \Rightarrow y'(x_0) = y'(1) = 1.$

Vậy phương trình tuyến tuyến là:

$d : y = 1(x - 1) + (-2)$

$\Leftrightarrow y = x - 3 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0.$

Chọn A.

Câu 2: Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giaO điểm của (C) với trục Ox là:

A. $y = 3x$ **B.** $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$ **C.** $y = x - 3$ **D.** $y = 3x - 3$

Cách giải:

Ta có x_0 là nghiệm cuả phương trình $\dfrac{x-1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$

$y(x_0) = y(1) = 0$

$y' = \dfrac{1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1}{(1+2)^2} = \dfrac{3}{(x+2)^2}$

$y'(x_0) = y'(1) = \dfrac{1}{3}.$

Vậy phương trình tuyến tuyến là:

$d : y = \dfrac{1}{3} \cdot (x - 1) + 0. \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}.$

Chọn B.

Câu 3: Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = x^3 + 3x^2 + 1$ tại điểm $A(1;5)$ và B là giao điểm thứ hai của tiếp tuyến với đồ thị hàm số. Khi đó diện tích tam giác OAB bằng :

A. $S = 15$ **B.** $S = 12$ **C.** $S = 24$ **D.** $S = 6$

Cách giải:

$y' = 3x^2 + 6x,\ y'(x_0) = y'(1) = 9$

Vậy phương trình tuyến tuyến là:

$d: y = 9 \cdot (x-1) + 5 \Leftrightarrow y = 9x - 4$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$x^3 + 3x^2 + 1 = 9x - 4$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 \cdot (x+5) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = 1 \\ x_B = -5 \end{array}\right.$

Vậy $\overrightarrow{OB}(-5;-49);\ \overrightarrow{OA}(1;5)$

$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot \left|-5 \times 5 \cdot (-49) \cdot 1\right| = 12$

Chọn B.

Dạng 2: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi biết hệ số góc

Câu 1: Cho hàm số có đồ thị (C) $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$.

A. $y = -9(x+3)$ **B.** $y + 16 = -9(x+3)$ **C.** $y - 16 = -9(x-3)$ **D.** $y - 16 = -9(x+3)$

Cách giải:

$k = y'(x_0)$

$\Leftrightarrow x_0^2 + 6x_0 = -9$

$\Leftrightarrow x_0^2 + 6x_0 + 9 = 0$

$\Leftrightarrow x_0 = -3.$

$y(x_0) = y(-3) = 16$

Vậy phương trình tuyến tuyến là:

$d: y = -9(x+3) + 16$

Chọn D.

Câu 2: Cho hàm số có đồ thị (C) $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

A. $y = -2x$ **B.** $y = 2x - 1$ **C.** $y = -2x + 1$ **D.** $y = 2x - 2$

Cách giải:

$k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 + 5 = g(x_0).$

Ta thấy $y = g(x_0)$ là parabal có đỉnh là $I(1;2)$.

Vậy $k_{\min} = 2$ khi $x_0 = 1$.

$y(x_0) = y(1) = 1.$

Vậy phương trình tuyến tuyến là:

$d: y = 2 \cdot (x-1) + 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1.$

Chọn B.

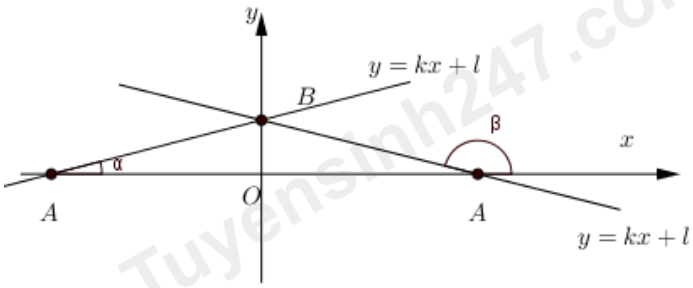
Câu 3: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ (C). Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến đó cắt trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B thỏa mãn OA = 40B là:

A. $\dfrac{-1}{4}$ **B.** $\dfrac{1}{4}$ **C.** $\dfrac{-1}{4}$ và $\dfrac{1}{4}$ **D.** 1

Cách giải:

Hệ số góc

$$\left[\begin{array}{l} k = \tan\alpha = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{1}{4} \\ k = \tan\beta = -\tan\alpha = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$



Ta có: $y' = \dfrac{-2+1}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

Giải phương trình $y'(x_0) = k$, ta có:

Th1: $-\dfrac{1}{(x_0-1)^2} = \dfrac{1}{4}$ (loại)

Th2:

$$-\frac{1}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$$

Vậy $k = -\dfrac{1}{4}$

Chọn A.

Câu 4: Cho hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm các điểm M thuộc đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $y = 4x + 7$

A. $M\left(2, \dfrac{7}{3}\right)$ hoặc $M\left(3, \dfrac{9}{4}\right)$ **B.** $M\left(-3, \dfrac{3}{2}\right)$ hoặc $M\left(2, \dfrac{7}{3}\right)$

C. $M\left(1, \dfrac{5}{2}\right)$ hoặc $M\left(-3, \dfrac{3}{2}\right)$ **D.** $M\left(1, \dfrac{5}{2}\right)$ hoặc $M\left(3, \dfrac{9}{4}\right)$

Cách giải:

Chú ý: cho d_1 và d_2 có hệ số góc lần lượt là k_1 và k_2.

Nếu $d_1 // d_1$ thì $k_1 = k_2$

$d_1 \perp d_1$ thì $k_1 \cdot k_2 = -1$

Do tiếp tuyến vuông góc với $y = 4x + 7$ nên $k \cdot 4 = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm thì:

$$y'(x_0) = k \Leftrightarrow \frac{-1}{(x_0+1)^2} = -\frac{1}{4}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -3 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow M\left(1; \frac{5}{2}\right) \text{ hoặc } M\left(-3; \frac{3}{2}\right)$$

Chọn C.

Câu 5: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C). Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = 3x + 2018$

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Cách giải:

+) Do d song song với $y = 3x + 2018$ nên $k = 3$

$$y'(x_0) = k \Leftrightarrow 4x_0^3 - 4x_0 + 3 = 3.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \end{array}\right.$$

+) Với $x_0 = 0 \Rightarrow y(x_0) = 1$

Vậy phương trình tiếp tuyến là:

$d: y = 3 \cdot (x - 0) + 1 \Leftrightarrow y = 3x + 1$ (tm)

+) Với $x_0 = 1 \Rightarrow y(x_0) = y(1) = 3$

Vậy phương trình tiếp tuyến là:

$d: y = 3(x - 1) + 3 \Leftrightarrow y = 3x$ (tm)

Chọn B.