BÀI GIẢNG: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP
CHUYÊN ĐỀ: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ
MÔN: TOÁN 12
GIÁO VIÊN: NGÔ VĂN TOẢN

MỤC TIÊU

✓ *Ôn tập tính đơn điệu của hàm số.*

Dạng 1. Cho thông tin hàm $f(x)$, hoặc $f'(x)$. Tìm khoảng đơn điệu hàm $g(x)=f(u(x))$

Phương pháp:

- Tìm TXĐ của hàm số

- Tính $g'(x)=\left[f(u(x))\right]'=f'(u(x)).u'(x)$

- Lập bảng xét dấu $g'(x)$

Giải $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(u(x)).u'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f'(u(x))=0 & (1)\\ u'(x)=0 & (2)\end{array}\right.$

Đặt $X=u(x)$, (1) trở thành $f'(X)=0$

Từ đó tìm được X rồi tìm x

Dạng 2. Cho thông tin hàm $f(x)$, $f'(x)$. Tìm khoảng đơn điệu hàm $g(x)=f(u(x))+g(x)$

Phương pháp:

Xét dấu $h'(x)$

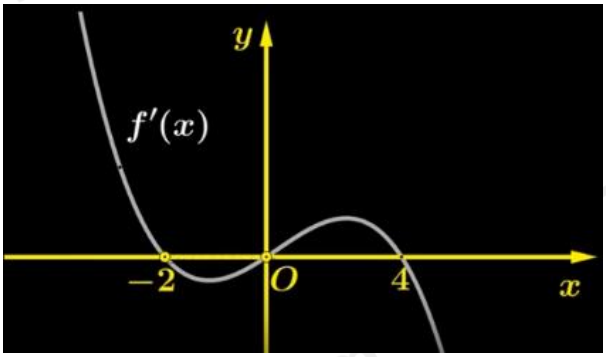
ĐỀ BÀI

ÔN TẬP BÀI CŨ

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=(x+3)(x+1)^2(x-1)$. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;4)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(-3;1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-2;0)$. **B.** $(-2;4)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

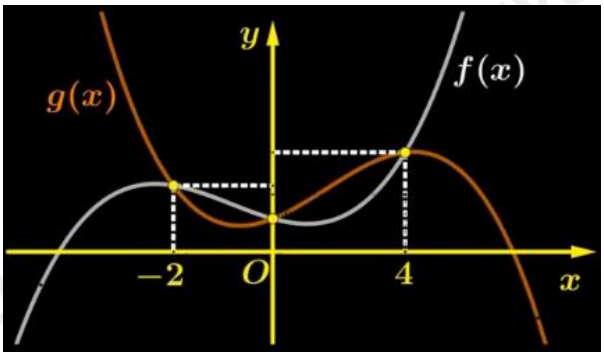
Câu 3: Cho hàm số $y=\log_3\left(x^2+1\right)$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=x(x-2)$. Đặt $g(x)=f\left(e^x-2\right)$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 5: Cho hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ như hình vẽ.



a) Tính tổng các nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$

b) Tìm tập nghiệm của bất phương trình $f(x)>g(x)$

c) Tìm tập nghiệm của bất phương trình $f(x)<g(x)$

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=(x+3)(x+1)^2(x-1)$. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;4)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(-3;1)$.

DẠNG 1

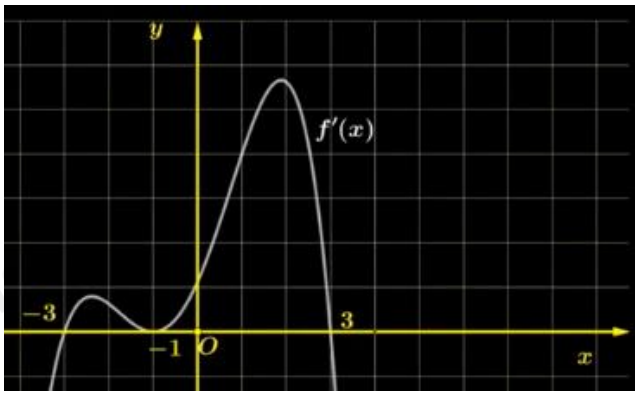
Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

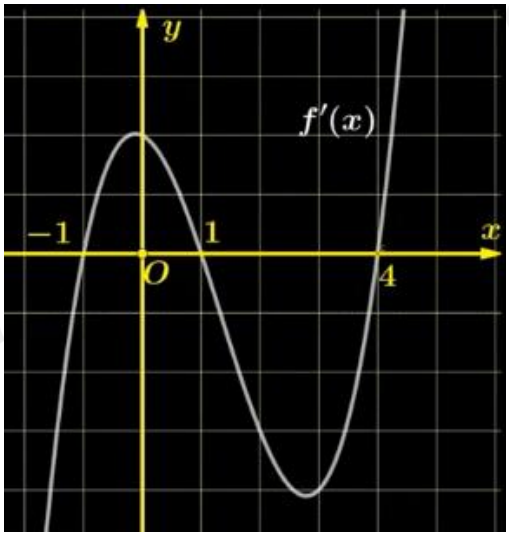
Hàm số $y=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;4)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-2;1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình bên dưới. Hàm số $g(x)=f(x^2-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



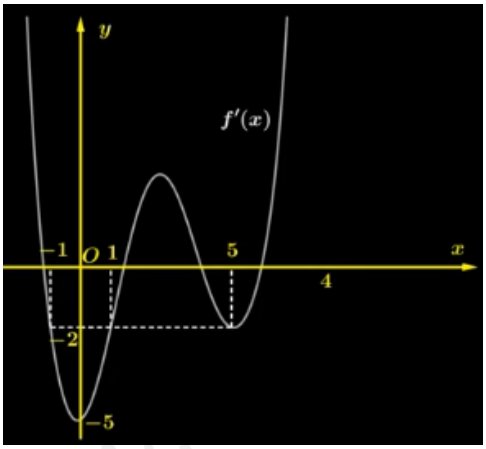
Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(4;7)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-1;2)$.

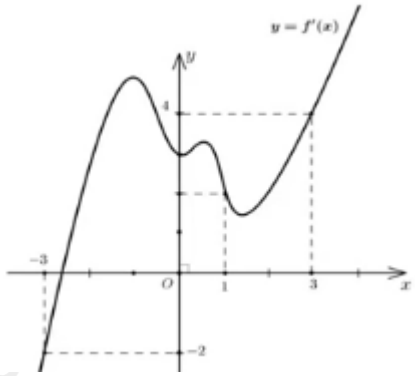
DẠNG 2

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=g(x)=f(x)+2x+1$. Hỏi đẳng thức nào sau đây đúng?



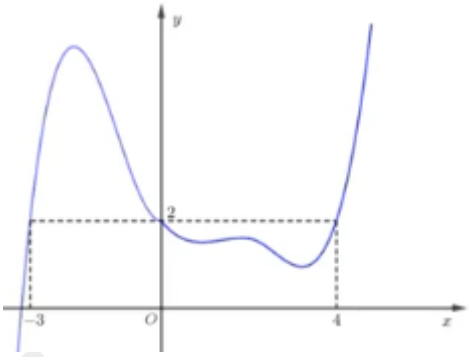
A. $g(6)>g(7)$. **B.** $g(3)>g(4)$. **C.** $g\left(-\frac{5}{2}\right)>g\left(-\frac{3}{2}\right)$. **D.** $g\left(-\frac{1}{2}\right)>g\left(\frac{1}{2}\right)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{(x+1)^2}{2}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-3;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x\right)-2x^2+6x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;4)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f\left(2x+1\right)-4x^3+9x^2-6x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;3\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

ÔN TẬP BÀI CŨ

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $f'\left(x\right)=\left(x+3\right)\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)$. Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(2;4\right)$. **B.** $\left(4;+\infty\right)$. **C.** $\left(-1;2\right)$. **D.** $\left(-3;1\right)$.

Cách giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+3=0\\\left(x+1\right)^2=0\\x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\\x=1\end{array}\right.$$

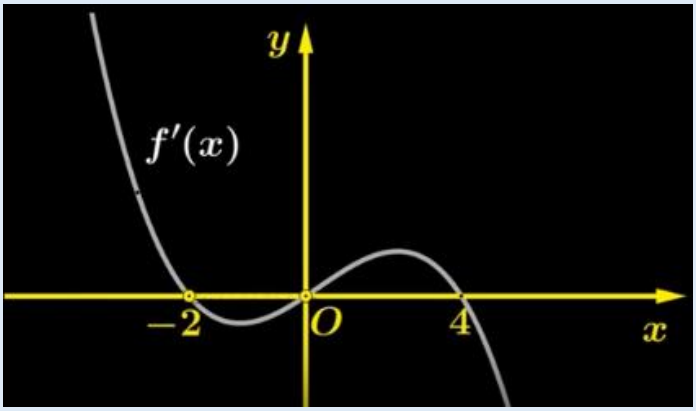
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số nghịch biến trên $\left(-3;1\right)$

Chọn D.

Câu 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị của đạo hàm $f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-2;0)$. **B.** $(-2;4)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Cách giải:

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$

Chọn D.

Câu 3: Cho hàm số $y=\log_3\left(x^2+1\right)$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Cách giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$$y'=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln 3}$$

$y'=0\Leftrightarrow x=0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$

Chọn D.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=x(x-2)$. Đặt $g(x)=f\left(e^x-2\right)$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Cách giải:

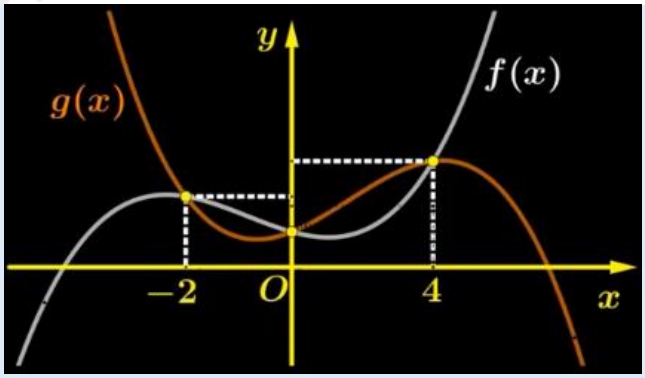
Ta có: $g'(x)=e^x f'\left(e^x-2\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e^x=0\\f'\left(e^x-2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow f'\left(e^x-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e^x-2=0\\e^x-2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e^x=2\\e^x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\ln 2\\x=\ln 4\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm

Chọn C.

Câu 5: Cho hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ như hình vẽ.



a) Tính tổng các nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$

b) Tìm tập nghiệm của bất phương trình $f(x)>g(x)$

c) Tìm tập nghiệm của bất phương trình $f(x)<g(x)$

Cách giải:

a) Từ đồ thị ta có $S=\{-2;0;4\}$

b) Dựa vào đồ thị ta có $f(x)>g(x)\Leftrightarrow x\in(-2;0)\cup(4;+\infty)$

c) Dựa vào đồ thị ta có $f(x)<g(x)\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(0;4)$

DẠNG 1

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;4)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-2;1)$.

Cách giải:

Cách 1: TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$g'(x)=-2f'(3-2x)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(3-2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-2x=-3\\3-2x=-1\\3-2x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=2\\x=1\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(2;3)$

Cách 2: TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$g'(x)=-2f'(3-2x)$

$$g'(x)\le 0\Leftrightarrow -2f'(3-2x)\le 0\Leftrightarrow f'(3-2x)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-3\le 3-2x\le -1\\ 3-2x\ge 1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}3-2x\ge -3\\ 3-2x\le -1\end{array}\right.\\ x\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\le x\le 3\\ x\le 1\end{array}\right.$$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(2;3)$

Cách 3: TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$g'(x)=-2f'(3-2x)$

$f'(x)=a(x+3)(x+1)(x-1)$

$f'(2)=10a>0\Rightarrow a>0$

Chọn $a=1$

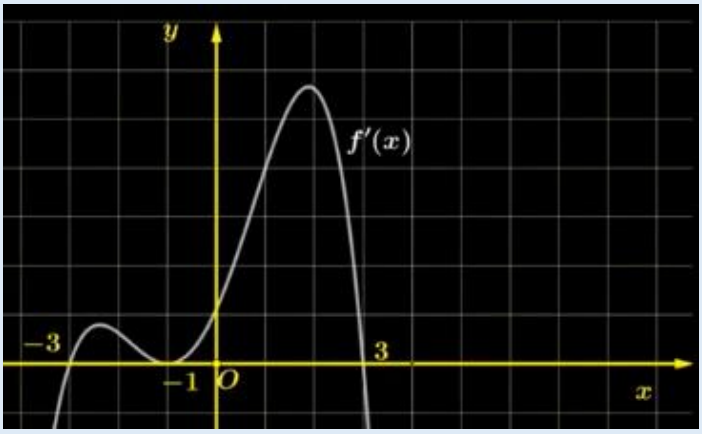
Khi đó $f'(x)=(x+3)(x+1)(x-1)$

$\Rightarrow g'(x)=-2f'(3-2x)=-2(3-2x+3)(3-2x+1)(3-2x-1)=-2(6-2x)(4-2x)(2-2x)$

Từ đây lập bảng xét dấu

Chọn D.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình bên dưới. Hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào?



Cách giải:

Cách 1: TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$g'(x)=(2x-2)f'\left(x^2-2x\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ f'\left(x^2-2x\right)=0\ (*)\end{array}\right.$$

$$(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-2x=-3\\ x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-2x+3=0\ (VN)\\ x^2-2x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$

Cách 2: TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x)$

$$g'(x)\ge 0\Leftrightarrow (2x-2)f'(x^2-2x)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f'(x^2-2x)\ge 0\\ 2x-2\ge 0\end{cases}\ (TH1)\\ \begin{cases}f'(x^2-2x)\le 0\\ 2x-2\le 0\end{cases}\ (TH2)\end{array}\right.$$

TH1: $\begin{cases}f'(x^2-2x)\ge 0\\ 2x-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x^2-2x\le 3\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x\ge -3\\ x^2-2x\le 3\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 3\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\le 3$

TH2: $\begin{cases}f'(x^2-2x)\le 0\\ 2x-2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-2x\le -3\\ x^2-2x\ge 3\end{array}\right.\\ x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -1\\ x\ge 3\end{array}\right.\\ x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow x\le -1$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(2;3)$

Cách 3: TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x)$

Ta có: $f'(x)=a(x+3)(x+1)^2(x-3)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=-\infty\Rightarrow a<0$

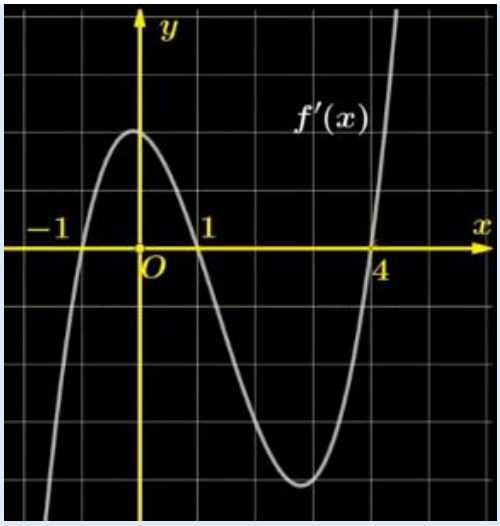
Chọn $a=-1$

Khi đó $f'(x)=-(x+3)(x+1)^2(x-3)$

$\Rightarrow g'(x)=(2x-2)\left(-(x^2-2x+3)(x^2-2x+1)^2(x^2-2x-3)\right)$

Lập bảng xét dấu

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(4;7)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-1;2)$.

Cách giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$$g'(x)=f'\left(|3-x|\right)\left(|3-x|\right)'=\frac{-f'\left(|3-x|(3-x)\right)}{|3-x|}$$

$$g'(x)=0\Rightarrow f'\left(|3-x|\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|3-x|=-1\,(VN)\\|3-x|=1\\|3-x|=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-x=\pm1\\3-x=\pm4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=4\\x=-1\\x=7\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu:

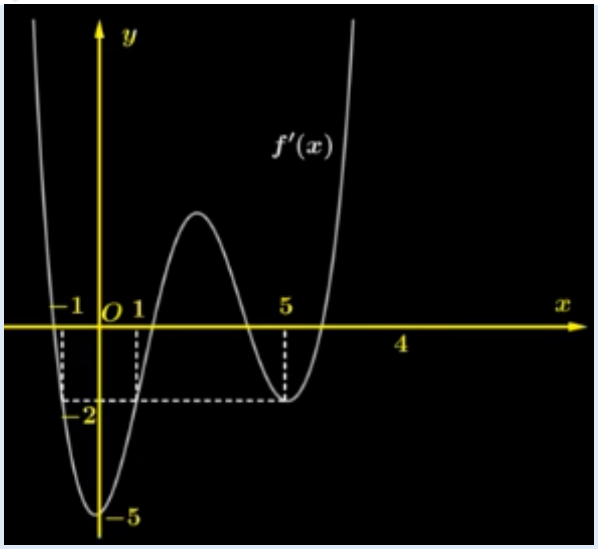
x	$-\infty$	-1		2		3		4		7	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên $(-1;2)$ và $(3;4)$ và $(7;+\infty)$

Chọn D.

DẠNG 2

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=g(x)=f(x)+2x+1$. Hỏi đẳng thức nào sau đây đúng?



A. $g(6)>g(7)$. **B.** $g(3)>g(4)$. **C.** $g\left(-\frac{5}{2}\right)>g\left(-\frac{3}{2}\right)$. **D.** $g\left(-\frac{1}{2}\right)>g\left(\frac{1}{2}\right)$.

Cách giải:

Ta có: $g'(x)=f'(x)+2$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=5\end{array}\right.$$

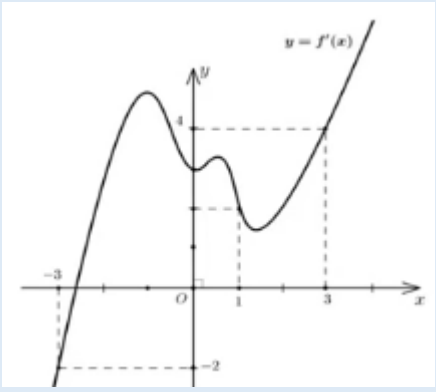
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		1		5		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$ nên $g\left(-\frac{1}{2}\right)>g\left(\frac{1}{2}\right)$

Chọn D.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{(x+1)^2}{2}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-3;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$.

Cách giải:

Ta có: $g'(x)=f'(x)-(x+1)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x+1\,(*)$

Nghiệm của (*) là hoành độ giao điểm của $y=f'(x)$ và $y=x+1$

Từ đồ thị hàm số ta có $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\\x=3\end{array}\right.$

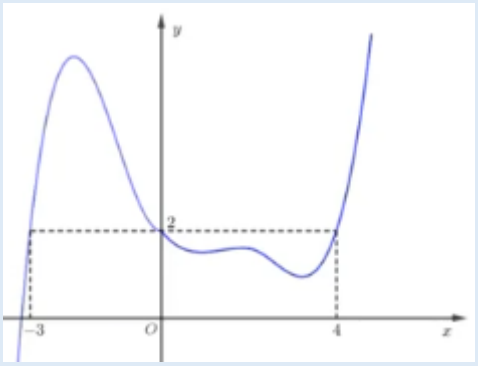
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên $(-3;1)$ và $(3;+\infty)$

Chọn A.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x\right)-2x^2+6x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;4)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;1)$.

Cách giải:

Ta có: $g'(x)=f'\left(x^2-3x\right)(2x-3)-4x+6=(2x-3)\left[f'\left(x^2-3\right)-2\right]$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}\\f'\left(x^2-3x\right)=2\,(*)\end{array}\right.$

$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x=-3\\x^2-3x=0\\x^2-3x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+3=0\\x^2-3x=0\\x^2-3x-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\\x=-1\\x=4\end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{3}{2}$		3		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$, $\left(\frac{3}{2};3\right)$ và $(4;+\infty)$

Chọn D.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f(2x+1)-4x^3+9x^2-6x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Cách giải:

Ta có: $g'(x)=6f'(2x+1)-12x^2+18x-6=6\left[f'(2x+1)-(2x^2-3x+1)\right]\geq 0$

$$g'(x)\geq 0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}f'(2x+1)\geq 0\\2x^2-3x+1\leq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}1\leq 2x+1\leq 3\\2x+1\geq 4\end{array}\right.\\\frac{1}{2}\leq x\leq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0\leq x\leq 1\\x\geq\frac{3}{2}\end{array}\right.\\\frac{1}{2}\leq x\leq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leq x\leq 1$$

Chọn D.