BÀI GIẢNG: TÌM GIÁ TRỊ CỦA THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN TẬP K

CHUYÊN ĐỀ: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

MÔN: TOÁN 12

GIÁO VIÊN: NGÔ VĂN TOẢN

MỤC TIÊU

- ✓ *Dạng 1. Hàm* $y=\dfrac{ax+b}{cx+d},(c\neq 0)$ *trong đó các hệ số a, b, c, d có thể chứa* m.
- ✓ *Dạng 2. Sử dụng định lý về dấu tam thức bậc hai để giải bài toán tìm giá trị của tham số để hàm số đồng biến trên khoảng cho trước*
- ✓ *Dạng 3. Sử dụng tính chất nghiệm bội chẵn/lẻ.*

Dạng 1. Hàm $y=\dfrac{ax+b}{cx+d},(c\neq 0)$ *trong đó các hệ số a, b, c, d có thể chứa* m.

Lưu ý: Khi c chứa tham số m thì ta xét hai trường hợp $c=0$ và $c\neq 0$.

Trường hợp $c=0$ ta xử lý đơn giản

Ta xét trường hợp thường gặp $c\neq 0$:

+) ĐKXĐ: $x\neq -\dfrac{d}{c}\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

+) $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Do $(cx+d)^2>0\forall x\in D$ nên dấu y' do dấu của $ad-bc$ quyết định

- $ad-bc=0\Rightarrow y=$ hằng số.
- $ad-bc>0\Rightarrow y'>0\forall x\in D\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.
- $ad-bc<0\Rightarrow y'<0\forall x\in D\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Bài toán 1. Tìm m để $y=\dfrac{ax+b}{cx+d},(c\neq 0)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên từng khoảng xác định.

- Đồng biến: $ad-bc>0$

- Nghịch biến: $ad-bc<0$

Bài toán 2. Tìm m để $y=\dfrac{ax+b}{cx+d},(c\neq 0)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng K cho trước

- Đồng biến trên K: $\begin{cases} ad-bc>0 \\ \dfrac{-d}{c}\notin K \end{cases}$.

- Nghịch biến trên K: $\begin{cases} ad-bc<0 \\ \dfrac{-d}{c}\notin K \end{cases}$.

Bài toán 3. Tìm m để $y=\dfrac{a.u(x)+b}{c.u(x)+d},(c\neq 0)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng K cho trước.

+) ĐKXĐ: $u\left(x\right)\neq -\dfrac{d}{c}$

+) $y'=u'\left(x\right).\dfrac{ad-bc}{\left(c.u\left(x\right)+d\right)^2}$

Hàm số đồng biến trên K $\Rightarrow y'>0\forall x\in K$

Hàm số nghịch biến trên K $\Rightarrow y'<0\forall x\in K$.

Dạng 2. Sử dụng định lý về dấu tam thức bậc hai để giải bài toán tìm giá trị của tham số đế hàm số đồng biến trên khoảng cho trước

Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c\quad (a\neq 0),\Delta=b^2-4ac$.

+ Nếu $\Delta<0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x\in\mathbb{R}$.

+ Nếu $\Delta=0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$.

+ Nếu $\Delta>0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$. Khi đó:

$f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(-\infty;x_1)$ và $\left(x_2;+\infty\right)$;

$f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $\left(x_1;x_2\right)$.

+ Nếu $\Delta<0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x\in\mathbb{R}$.

+ Nếu $\Delta=0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$.

Nhận xét 1: Cho $f(x)=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$,

+) $f(x)>0\forall x\in\mathbb{R},khi\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

+) $f(x)<0\forall x\in\mathbb{R},khi\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

+) $f(x)\geq 0\forall x\in\mathbb{R},khi\begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$

+) $f(x) \le 0 \forall x \in \mathbb{R}, khi \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$

ĐỀ BÀI

Dạng 1: ***Hàm*** $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}, (c \ne 0)$ ***trong đó các hệ số a, b, c, d có thể chứa*** m**.**

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thục ciia tham số m đế hàm số $y = \dfrac{2x+m}{x-1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $m \ge 2$. **B.** $m > -2$. **C.** $m < -2$. **D.** $m \le -2$.

Câu 2: Tìm tất cả các giả trị m sao cho hìm số $y = \dfrac{x+m}{x+2}$ đồng biến trên các khoảng xác định.

A. $m \ge 2$. **B.** $m < 2$. **C.** $m \le 2$. **D.** $m > 2$.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

A. $-2 < m \le -1$. **B.** $-2 < m < 2$. **C.** $-2 \le m \le 2$. **D.** $-2 \le m \le 1$.

Câu 4: Tập hợp các tham số thực m để hàm số $y = \dfrac{x+1}{x+m}$ đồng biến trên $(-\infty;-2)$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(1;2]$. **C.** $[1;2)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{\cot x - 2}{\cot x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $1 \le m < 2$. **B.** $m < 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ 1 \le m < 2 \end{array}\right.$. **D.** $m \le 0$.

Dạng 2. Sử dụng định lý về dấu tam thức bậc hai để giải bài toán tìm giá trị của tham số đế hàm số đồng biến trên khoảng cho trước

Câu 6: Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$, vớ m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 7: Tập hợp tất cả các giá trị của tham đố m đổ hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2mx - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng

A. $[2;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Câu 8: Tổng các giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx-2022$ đồng biến trên một đoạn có độ dài là nhỏ hơn 8 là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 9: Cho hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ (với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

A. $m\le -\frac{3}{4}$. **B.** $m\le -3$. **C.** $m<-\frac{3}{4}$. **D.** $m<-3$.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn [1; 20] để hàm số $y=\frac{-x^2+3x-m-1}{3x-m}$

a) Nghịch biến trên từng khoảng xác định

b) Nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Câu 10.1: Có bao nhiêu giá trij nguyên cỉa tham số m thuộc đoạn [1; 20] để hàm số $y=\frac{-x^2+3x-m-1}{3x-m}$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 11: Cho hàm số $y=\frac{1}{9}x^9+x^7+\left(2m^2-3m-2\right)x^4+1$. Tập các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên R là

A. $\left\{2;-\frac{1}{2}\right\}$. **B.** $\left\{-2;\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\{2\}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng 1: ***Hàm*** $y=\frac{ax+b}{cx+d},(c\ne 0)$ ***trong đó các hệ số a, b, c, d có thể chứa*** m.

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thục ciia tham số m đế hàm số $y=\frac{2x+m}{x-1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $m\ge 2$. **B.** $m>-2$. **C.** $m<-2$. **D.** $m\le -2$.

Cách giải:

Ta có $y=\frac{2x+m}{x-1}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}, y'=\frac{-m-2}{(x-1)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chi khi $y'<0,\forall x\in D$

$\Leftrightarrow -m-2<0\Leftrightarrow m>-2.$

Chọn B.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị m sao cho hìm số $y=\dfrac{x+m}{x+2}$ đồng biến trên các khoảng xác định.

A. $m\ge 2$. **B.** $m<2$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m>2$.

Cách giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Ta co: $y'=\dfrac{2-m}{(x+2)^2}$

Hàm số đồng biến trên cảc khoảng xác định khi

$\$ 2-m>0\Leftrightarrow m<2 \$.$

Chọn B.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

A. $-2<m\le -1$. **B.** $-2<m<2$. **C.** $-2\le m\le 2$. **D.** $-2\le m\le 1$.

Cách giải:

TXĐ: $D=R\setminus\{-m\}$.

$y'=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4<0\\-m\notin(-\infty;1)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\-m\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\m\le -1\end{cases}\Leftrightarrow -2<m\le -1$

Chọn A.

Câu 4: Tập hợp các tham số thực m để hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+m}$ đồng biến trên $(-\infty;-2)$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(1;2]$. **C.** $[1;2)$. **D.** $(1;2)$.

Cách giải:

TXĐ: $D=R\setminus\{m\}$.

$y'=\dfrac{m-1}{(x+m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)\Leftrightarrow\begin{cases}m-1>0\\-m\notin(-\infty;-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\\left[\begin{array}{l}-m\ge -2\\-m\le 2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\in(1;2]$.

Chọn B.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{\cot x-2}{\cot x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $1\le m<2$. **B.** $m<2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ 1\le m<2 \end{array}\right.$. **D.** $m\le 0$.

Cách giải:

ĐKXĐ: $\cot x\ne m$.

$$y'=\left(\cot x\right)'.\frac{-m+2}{\left(\cot x-m\right)^2}=-\frac{1}{\sin^2 x}.\frac{-m+2}{\left(\cot x-m\right)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow y'<0\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-m+2>0\\ \cot x\ne m,\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}(*)$$

$(*):\cot x\in(0;1),\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$(*)\Leftrightarrow m\notin(0;1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\leqslant 0 \\ m\geqslant 1 \end{array}\right.$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ 1\le m<2 \end{array}\right.$

Chọn C.

Câu 6: Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 5.

Cách giải:

Ta có $y'=-3x^2-2mx+4m+9$.

Đề hàm số dã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}<0$

$$\$\Leftrightarrow -3x^2-2mx+4m+9\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta\ \le 0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow m^2+3(4m+9)\le 0\Leftrightarrow -9\le m\le -3.$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-9;-8;\ldots;-3\}$.

Vây có 7 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn C.

Câu 7: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+2mx-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng

A. $[2;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Cách giải:

Ta có $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+2mx-1$, suy ra $f'(x)=x^2-4x+2m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chi khi $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow x^2-4x+2m\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \Delta'\le 0\Leftrightarrow 4-2m\le 0\Leftrightarrow m\ge 2.$

Chọn A.

Câu 8: Tổng các giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx-2022$ đồng biến trên một đoạn có độ dài là nhỏ hơn 8 là

A. 0. **B.** -3. **C.** 2. **D.** 1.

Cách giải:

Ta có $y=-\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx-2022$ suy ra $y'=-x^2-2mx+m$

$\begin{cases}a=-1<0\\ \Delta'=m^2+m\end{cases}$

Hàm số đồng biến trên một đoạn có độ dài là nhỏ hơn 8

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ |x_1-x_2|<8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+m>0\\ (x_1+x_2)^2-4x_1x_2<64\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)\\ 4m^2+4m<64\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)\\ m\in\left(\frac{-1-\sqrt{65}}{2};\frac{-1+\sqrt{65}}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(\frac{-1-\sqrt{65}}{2};-1\right)\cup\left(0;\frac{-1+\sqrt{65}}{2}\right)$

Chọn B.

Câu 9: Cho hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ (với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

A. $m\le-\frac{3}{4}$. **B.** $m\le-3$. **C.** $m<-\frac{3}{4}$. **D.** $m<-3$.

Cách giải:

TXĐ $D = R$

$y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9$

$a = -3 < 0$

$\Delta' = (-6)^2 - (-3)(4m - 9) = 9 + 12m$

Nghịch biến trên $(-\infty; -1) \Leftrightarrow y' < 0 \forall x \in (-\infty; -1)$

+) TH1: $\Delta' \leqslant 0 \Leftrightarrow 9 + 12m \leqslant 0 \Leftrightarrow m \leqslant -\frac{3}{4}$

do $a < 0 \Rightarrow y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} = 14 \leq 0 \forall x \in (-\infty; -1) \Rightarrow m \leq -\frac{3}{4} (tm)$

+) TH2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > \frac{-3}{4} \Rightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(-1) \leq 0 \\ -1 \leq x_1 < x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m \leq 0 \\ x_1 + x_2 > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ -4 > -2 (ktm) \end{cases}$

Chọn A.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn [1; 20] để hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x - m - 1}{3x - m}$

a) Nghịch biến trên từng khoảng xác định

b) Nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$

Cách giải:

$D = R \setminus \left\{\frac{m}{3}\right\}$.

$y' = \frac{-3x^2 + 2mx + 3}{(3x - m)^2}$

a) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi $y' \leq 0 \forall x \in D$

$\Leftrightarrow g(x) = -3x^2 + 2mx + 3 \leq 0 \quad \forall x \in D$

$(a = -3 < 0, \Delta' = m^2 + 9$

Do $\Delta' > 0 \forall m \Rightarrow g(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

$\Rightarrow g \leq 0$ khi $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

$\Rightarrow$ Không có giá trị của m thoả mãn.

b) Để hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$ thì $y' \leqslant 0 \quad \forall x \in (1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2+2mx+3\le 0 \forall x\in(1;+\infty)(1). \\ \dfrac{m}{3}\notin(1,+\infty)\Leftrightarrow m\le 3 \end{cases}$$

Giải (1) $a=-3<0,\Delta'=m^2+9>0\forall m\Rightarrow g(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2.

$$g(x)\le 0\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow \begin{cases} g(1)\le 0 \\ x_1<x_2\le 1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 2m\le 0 \\ x_1+x_2<2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m\le 0 \\ \dfrac{2m}{3}<2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\le 0 \\ m<3 \end{cases}\Leftrightarrow m\le 0\Rightarrow$$ Không tồn tại m thoả mãn điều kiện.

Câu 11: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{9}x^9+x^7+\left(2m^2-3m-2\right)x^4+1$. Tập các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên R là

A. $\left\{2;-\dfrac{1}{2}\right\}$. **B.** $\left\{-2;\dfrac{1}{2}\right\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\{2\}$.

Cách giải:

$D=\mathbb{R}$, $y'=x^8+7x^6+4\left(2m^2-3m-2\right)x^3$.

Hàm số đồng biến trên R thì $y'\ge 0,\forall x\in R$.

$$\Leftrightarrow x^3\left[x^5+7x^3+4\left(2m^2-3m-2\right)\right]\geqslant 0\forall x\in R$$

Nhận xét: nếu $g(x)=x^5+7x^3+4\left(2m^2-3m-2\right)$ không có nghiệm $x=0$ thì y' nhận $x=0$ là nghiệm bội lẻ

$\Rightarrow y'$ không đơn điệu trên R.

Suy ra $g(0)=0\Leftrightarrow 2m^2-3m-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Thử lại $m=2\Rightarrow y'=x^3\left(x^5+7x^3\right)=x^8+7x^6\ge 0\forall x\in R\Rightarrow m=2(tm)$

$m=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow y'=x^8+7x^6\ge 0\forall x\in R\Rightarrow m=-\dfrac{1}{2}(tm)$

Vì $m\in Z\Rightarrow m=2$.