BÀI GIẢNG: VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN TIẾT 1
CHUYÊN ĐỀ: VEC TƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN
MÔN: TOÁN 12
GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

MỤC TIÊU

- ✓ *Nhận biết vec tơ trong không gian.*
- ✓ *Nhận biết và thực hiện các phép toán trong không gian.*

I. VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN

HĐ1. Nhận biết vec tơ trong không gian

Trong hình 2.2, lực căng dây (được tạo ra bởi sức nặng của kiện hàng) được thể hiện bởi các đoạn thẳng có mũi tên màu đỏ.



Hình 2.2

a) Các đoạn thẳng này cho biết gì về hướng và độ lớn của các lực căng dây?

b) Các đoạn thẳng này có cùng nằm trong một mặt phẳng không?

Lời giải:

a) Các đoạn thẳng này có hướng lên trên (về phía móc cần cẩu) và độ dài của các đoạn thẳng thể hiện cho độ lớn của các lực căng dây và được lấy tỉ lệ với độ lớn của các lực căng dây.

b) Các đoạn thẳng này không cùng nằm trên một mặt phẳng.

- **Vec tơ trong không gian** là một đoạn thẳng có hướng.
- Độ dài của vec tơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vec tơ đó.

?. Hình 2.3 cho ta ví dụ về một số đại lượng có thể được biểu diễn bởi vec tơ trong không gian. Hãy tìm thêm một số ví dụ tương tự.



Hình 2.3. Vận tốc gió và vận tốc của máy bay có thể được biểu diễn bởi vectơ trong không gian.

Lời giải:

a) Hướng bay của khinh khí cầu

b) Hướng đi của thuyền trên sông

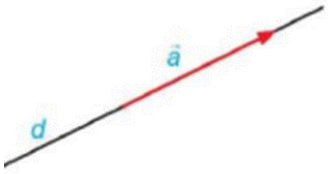
Chú ý: Tương tự như vec tơ trong mặt phẳng, đối với vec tơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Vec tơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$

- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vec tơ thì vec tơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$

- Độ dài của vec tơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, độ dài của vec tơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $\left|\vec{a}\right|$

- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vec tơ được gọi là giá của vec tơ đó (H.2.4).



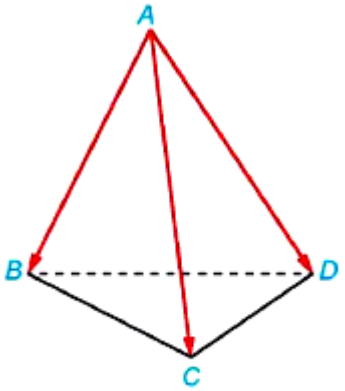
Hình 2.4. Đường thẳng d là giá của vectơ a.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.5)

a) Có bao nhiêu vec tơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện?

b) Trong các vec tơ tìm được ở câu a, những vec tơ nào có giá nằm trong mặt phẳng (ABC)?

c) Tính độ dài của các vec tơ tìm được ở câu a.



Hình 2.5

Lời giải:

a) Có ba vec tơ là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$

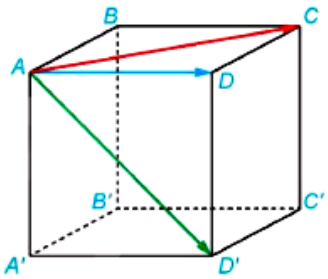
b) Trong ba vec tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ chỉ có hai vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ có giá nằm trong mặt phẳng (ABC)

c) Vì tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 nên $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = 1$

Luyện tập 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (H.2.6). Trong các vec tơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD'}$

a) Hai vec tơ nào có giá cùng nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$?

b) Hai vec tơ nào có cùng độ dài?



Hình 2.6

Lời giải:

a) Trong các vec tơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD'}$, hai vec tơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ có giá nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$

b) Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $AD = DC = DD'$

Tam giác ADD' vuông tại D nên theo định lý Pythagore ta có:

$AD' = \sqrt{AD^2 + DD'^2} = AD\sqrt{2}$

HĐ2. Hình thành khái niệm hai vec tơ cùng phương, cùng hướng/ngược hướng, hai vec tơ bằng nhau trong không gian

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (H.2.7)

a) So sánh độ dài của hai vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.

b) Nhận xét về giá của hai vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.

c) Hai vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$ có cùng phương không? Có cùng hướng không?

Lời giải:

a) Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $ABCD$ và $DCC'D'$ là các hình bình hành

Suy ra, $AB = CD = D'C'$

Do đó, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{D'C'}\right|$

b) Vì $ABCD$ và $DCC'D'$ là các hình bình hành nên $AB \parallel CD$, $CD \parallel C'D'$

Do đó, $AB \parallel C'D'$

Vậy giá của hai vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$ song song với nhau.

c) Hai vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$ cùng phương và cùng hướng.

Tương tự như trường hợp của vec tơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vec tơ trong không gian:

- Hai vec tơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vec tơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

?. Nếu hai vec tơ cùng bằng một vec tơ thứ ba thì hai vec tơ đó có bằng nhau không?

Lời giải:

Giả sử có ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ sao cho: $\vec{a} = \vec{b}$ và $\vec{b} = \vec{c}$

Vì $\vec{a} = \vec{b}$ nên hai vec tơ $\vec{a}, \vec{b}$ có cùng hướng và $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$ (1)

Vì $\vec{b} = \vec{c}$ nên hai vec tơ $\vec{b}, \vec{c}$ có cùng hướng và $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hai vec tơ $\vec{a}, \vec{c}$ có cùng hướng và $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{c}\right|$

Do đó, $\vec{a} = \vec{c}$

Vậy hai vec tơ cùng bằng một vec tơ thứ ba thì hai vec tơ đó bằng nhau.

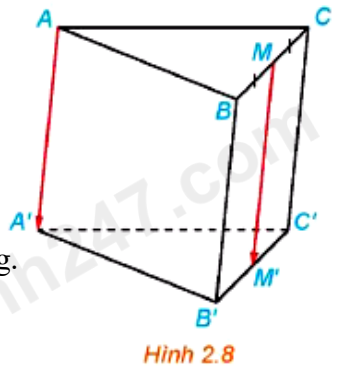
Chú ý: Tương tự như vec tơ trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vec tơ trong không gian:

- Trong không gian, với mỗi điểm O và vec tơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$

- Các vec tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BB'},\ldots$ gọi là các vec tơ – không.

- Ta quy ước vec tơ – không có độ dài là 0, cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vec tơ. Do đó, các vec tơ – không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (H.2.8)



Hình 2.8

a) Trong ba vec tơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$, vec tơ nào bằng vec tơ $\overrightarrow{AA'}$? Giải thích vì sao.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$

Lời giải:

a) Hai đường thẳng AA', BC chéo nhau nên hai vec tơ $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương.

Do đó, hai vec tơ $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BC}$ không bằng nhau.

Tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành nên $AA'\parallel CC'$ và $AA'=CC'$.

Hai vec tơ $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{CC'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên hai vec tơ đó bằng nhau.

Tương tự, hai vec tơ $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên hai vec tơ $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ không bằng nhau.

b) Gọi M' là trung điểm của cạnh $B'C'$

Vì tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $MM'\parallel BB'$ và $MM'=BB'$

Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA'\parallel BB'$ và $AA'=BB'$

Suy ra $MM'\parallel AA'$ và $MM'=AA'$

Hai vec tơ $\overrightarrow{MM'}$, $\overrightarrow{AA'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$

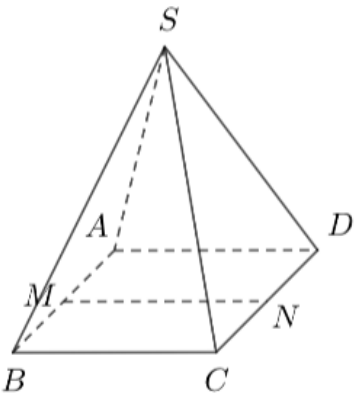
Vậy trung điểm của cạnh $B'C'$ là điểm M' cần tìm.

Luyện tập 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

a) Trong ba vec tơ $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DC}$, vec tơ nào bằng vec tơ $\overrightarrow{AB}$?

b) Gọi M là một điểm thuộc cạnh AD. Xác định điểm N sao cho $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}$

Lời giải:



a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB\parallel CD$ và $AB=CD$

Do đó, hai vec tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên hai vec tơ đó bằng nhau.

Vì AB, SC chéo nhau nên hai vec tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{SC}$ không cùng phương

Do đó, hai vec tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{SC}$ không bằng nhau.

Vì hai vec tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ không cùng phương nên hai vec tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ không bằng nhau.

b) Qua M vẽ đường thẳng song song với AB cắt BC tại N

Tứ giác $ABNM$ có $AB \parallel MN$, $AM \parallel BN$, nên tứ giác $ABNM$ là hình bình hành.

Do đó, $AB = MN$

Lại có: $AB \parallel MN$

Do đó hai vec tơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}$ cùng độ dài và cùng hướng

Suy ra, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$

Vậy điểm N cần tìm là giao điểm của đường thẳng qua M song song với AB và cạnh BC

Vận dụng 1. Một tòa nhà có chiều cao của các tầng là như nhau. Một chiếc thang máy di chuyển từ tầng 15 lên tầng 22 của tòa nhà, sau đó di chuyển từ tầng 22 lên tầng 29. Các vec tơ biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy trong hai lần di chuyển đó có bằng nhau hay không? Giải thích vì sao.

Lời giải:

Gọi vec tơ biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy từ tầng 15 lên tầng 22 của tòa nhà là $\vec{a}$

Gọi vec tơ biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy từ tầng 22 lên tầng 29 của tòa nhà là $\vec{b}$

Vì hai vec tơ $\vec{a}, \vec{b}$ đều dịch chuyển từ tầng thấp lên tầng cao nên hai vec tơ $\vec{a}, \vec{b}$ có cùng hướng (1)

Độ dài vec tơ $\vec{a}$ là $|\vec{a}| = 7$, độ dài vec tơ $\vec{b}$ là $|\vec{b}| = 7$ nên $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 7$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\vec{a} = \vec{b}$

Vậy các vec tơ biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy trong hai lần di chuyển đó bằng nhau.

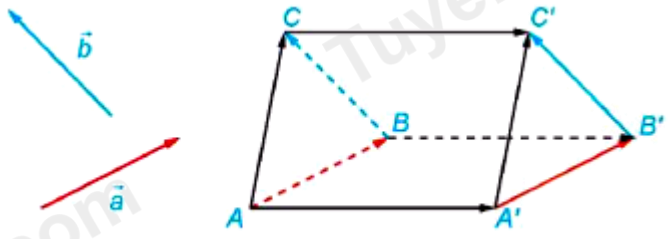
II. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN

1 Tổng của hai vec tơ trong không gian

HĐ3. Hình thành khái niệm tổng của hai vec tơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vec tơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương. Lấy điểm A và vẽ các vec tơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$

Lấy điểm A' khác A và vẽ các vec tơ $\overrightarrow{A'B'} = \vec{a}, \overrightarrow{B'C'} = \vec{b}$ (H.2.10)



Hình 2.10

a) Giải thích vì sao $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$

b) Giải thích vì sao $AA'C'C$ là hình bình hành, từ đó suy ra $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$

Lời giải:

a) Vì $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ nên hai vec tơ $\vec{a}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng và cùng độ dài.

Vì $\overrightarrow{A'B'}=\vec{a}$ nên hai vec tơ $\vec{a}$ và $\overrightarrow{A'B'}$ cùng hướng và cùng độ dài.

Do đó, hai vec tơ $\overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng và cùng độ dài.

Suy ra, $AA' \parallel BB',\ AA'=BB'$

$\Rightarrow \overrightarrow{AA'},\ \overrightarrow{BB'}$ có cùng hướng và cùng độ dài

Do đó, $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$

b) Vì hai vec tơ $\overrightarrow{AA'},\ \overrightarrow{BB'}$ có cùng hướng và cùng độ dài; hai vec tơ $\overrightarrow{BB'},\ \overrightarrow{CC'}$ có cùng hướng và cùng độ dài nên hai vec tơ $\overrightarrow{AA'},\ \overrightarrow{CC'}$ có cùng hướng và cùng độ dài.

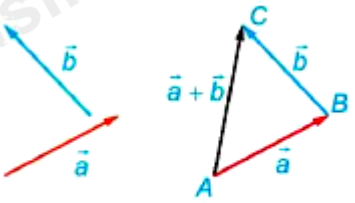
Do đó $AA'=CC',\ AA' \parallel CC' \Rightarrow AA'C'C$ là hình bình hành

$\Rightarrow AC=A'C',\ AC \parallel A'C'$

Do đó, hai vec tơ $\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{A'C'}$ có cùng hướng và cùng độ dài

Vậy $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$

Trong không gian, cho hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A bất kì và các điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Khi đó, vec tơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng của hai vec tơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a}+\vec{b}$



Hình 2.11

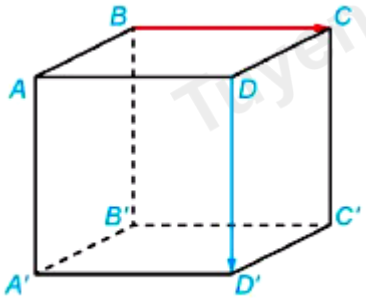
Nhận xét:

Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành trong mặt phẳng vẫn đúng trong không gian:

- Nếu A, B, C là ba điểm bất kì thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$;

- Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Ví dụ 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.12). Tính độ dài của vec tơ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD'}$



Hình 2.12

Lời giải:

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$

Do đó, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AD'}$

Tứ giác $ADD'A'$ là hình vuông $AD'=\sqrt{AD^2+DD'^2}=\sqrt{2}$ suy ra $\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD'}\right|=\sqrt{2}$

Chú ý: Tương tự như phép cộng vec tơ trong mặt phẳng, phép cộng vec tơ trong không gian có các tính chất sau:

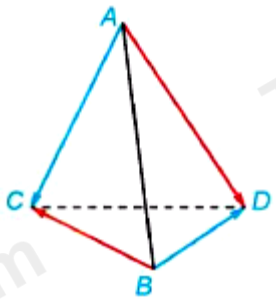
- Tính chất giao hoán: Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vec tơ bất kì thì $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

- Tính chất kết hợp: Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba vec tơ bất kì thì $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

- Tính chất cộng vec tơ với vec tơ $\vec{0}$: Nếu $\vec{a}$ là một vec tơ bất kì thì $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

Từ tính chất kết hợp của phép cộng vec tơ trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vec tơ trong không gian.

Ví dụ 4: Cho tứ diện $ABCD$ (H.2.13). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$



Hình 2.13

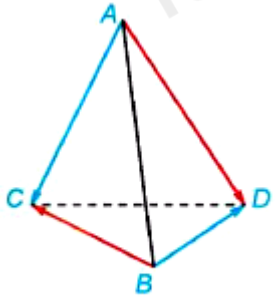
Lời giải:

Theo quy tắc ba điểm trong không gian, ta có $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$

Từ đó lần lượt áp dụng tính chất của phép cộng vec tơ trong không gian, ta được

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}\right)$$
$$=\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$$

Luyện tập 4: Cho tứ diện $ABCD$ (H.2.13). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$



Hình 2.13

Lời giải:

Ta có:

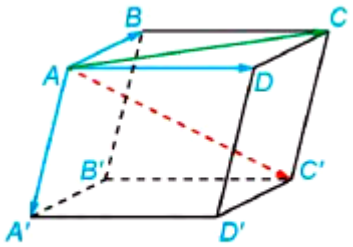
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}\right)$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DD}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

HĐ4. Thiết lập quy tắc hình hộp

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (H.2.14)



Hình 2.14

a) Hai vec tơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AC}$ có bằng nhau hay không?

b) Hai vec tơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{AC'}$ có bằng nhau hay không?

Lời giải:

a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}\ (1)$

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $AA'D'D$ và $DD'C'C$ là hình bình hành.

Do đó, $AA'\parallel DD'$, $AA'=DD'$ và $DD'\parallel CC'$, $DD'=CC'$

Suy ra, $AA'\parallel CC'$, $AA'=CC'$

Suy ra, tứ giác $AA'C'C$ là hình bình hành

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

Quy tắc hình hộp

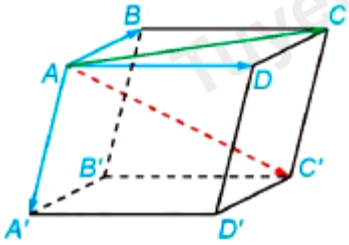
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

?. Trong hình 2.14, hãy phát biểu quy tắc hình hộp với các vec tơ có điểm đầu là B

Lời giải:

Quy tắc hình hộp với các vec tơ có điểm đầu là B là $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$

Ví dụ 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (H.2.14). Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$



Hình 2.14

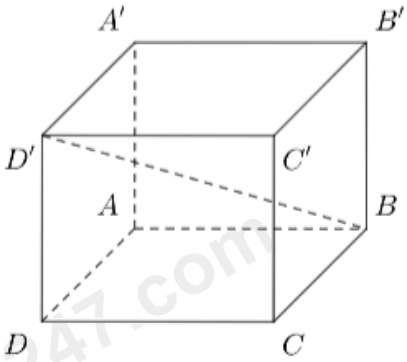
Lời giải:

Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

Áp dụng quy tắc hình hộp suy ra $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

Luyện tập 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD'}$

Lời giải:



Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD'}$

Ta có: $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD'}$

2 Hiệu của hai vec tơ trong không gian

HĐ5. Nhận biết vec tơ đối của một vec tơ trong không gian

Hình 2.15 mô tả một lọ hoa được đặt trên bàn, trọng lượng của lọ hoa tạo nên một lực tác dụng lên mặt bàn và một phản lực từ mặt bàn lên lọ hoa. Có nhận xét gì về độ dài và hướng của các vec tơ biểu diễn hai lực đó?

Lời giải:

Độ dài hai vec tơ bằng nhau và hướng ngược nhau.



Hình 2.15



Trong không gian, vec tơ có cùng độ dài và ngược hướng với vec tơ $\vec{a}$ được gọi là vec tơ đối của vec tơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$

Chú ý:

- Hai vec tơ là đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$
- Vec tơ $\overrightarrow{BA}$ là một vec tơ đối của vec tơ $\overrightarrow{AB}$
- Vec tơ $\vec{0}$ được coi là vec tơ đối của chính nó

Tương tự như hiệu của hai vec tơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của hai vec tơ trong không gian:

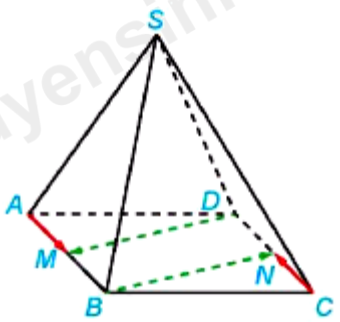
Vec tơ $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ được gọi là **hiệu của hai vec tơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$

Trong không gian, phép lấy hiệu của hai vec tơ được gọi là **phép trừ vec tơ**.

Nhận xét:

Với ba điểm O, A, B bất kì trong không gian, ta có $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD (H.2.16). Chứng minh rằng:



Hình 2.16

a) $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ là hai vec tơ đối nhau;

b) $\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{SA}$

Lời giải:

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB=CD,\ AB\parallel CD$

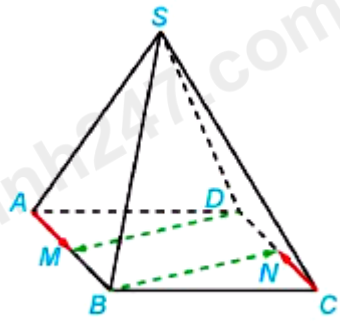
Suy ra $AM=CN,\ AM\parallel CN$

Hai vec tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai vec tơ đối nhau.

b) Từ câu a, ta có $\overrightarrow{CN}=-\overrightarrow{AM}$

Suy ra $\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{SN}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{SN}+\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{SA}$

Luyện tập 6: Trong ví dụ 6, chứng minh rằng:



Hình 2.16

a) $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ là hai vec tơ đối nhau;

b) $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SC}$

Lời giải:

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB=CD,\ AB\parallel CD$

Suy ra $BM=DN,\ BM\parallel DN$

Do đó tứ giác $DMBN$ là hình bình hành, do đó $BN=DM,\ BN\parallel DM$

Hai vec tơ $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai vec tơ đối nhau.

b) Từ câu a, ta có $\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{DM}$

Do đó $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{SC}$

Vận dụng 2: Thang cuốn tại các trung tâm thương mại, siêu thị lớn hay nhà ga, sân bay thường có hai làn, trong đó có một làn lên và một làn xuống. Khi thang cuốn chuyển động, vec tơ biểu diễn vận tốc của mỗi lần có là hai vec tơ đối nhau không? Giải thích vì sao?



Lời giải:

Vec tơ biểu diễn vận tốc của mỗi làn có cùng độ lớn và hướng ngược nhau nên chúng là hai vec tơ đối nhau.