BÀI GIẢNG: VECTO TRONG KHÔNG GIAN (tiết 1)

CHUYÊN ĐỀ: PHƯƠNG PHÁP TẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

MÔN: TOÁN 12

GIÁO VIÊN: NGÔ VĂN TOẢN

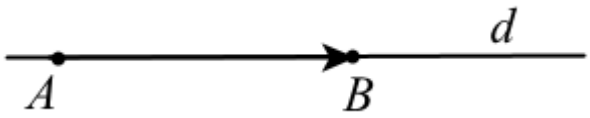
MỤC TIÊU

- ✓ *Phát biểu được định nghĩa vectơ trong không gian, mối quan hệ giữa các vectơ trong không gian*
- ✓ *Nhớ được quy tắc, tính chất các phép toán của vectơ trong không gian*
- ✓ *Viết được công thức tích vô hướng cuia hai vectơ và ứng dụng*
- ✓ *Rút gọn, chứng minh được đẳng thức vectơ*
- ✓ *Tính được tích vô hướng của hai vecto, ứng dụng tích vô hướng để tính được độ dài đoạn thẳng, góc giữa hai đường thẳng.*
- ✓ *Ứng dụng giải quyết các bài toán thực tế.*

A. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

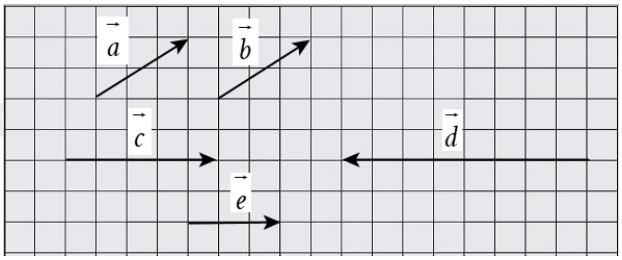
ÔN TẬP KIẾN THỨC VECTO TRONG MẶT PHẲNG

Câu 1: Cho hình vẽ dưới đây. Nối mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để được khẳng định đúng.



A	B
1. Điểm đầu của vecto $\overrightarrow{AB}$	a. B
2. Điểm cuối của vecto $\overrightarrow{AB}$	b. D
3. Giá của vecto $\overrightarrow{AB}$	c. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$
4. Độ dài của vecto $\overrightarrow{AB}$	d. A

Câu 2: Cho hình vẽ sau (cạnh của mỗi ô vuông dài 1cm). Đánh dấu × vào các ô trống để thể hiện đúng mối quan hệ của các vecto (cùng phương, không cùng phương, cùng hướng, ngược hướng)



Cặp vecto	Không cùng phương	Cùng phương	Cùng hướng	Ngược hướng
$\vec{a}$ và $\vec{c}$				
$\vec{a}$ và $\vec{b}$				
$\vec{e}$ và $\vec{c}$				
$\vec{d}$ và $\vec{c}$				

Câu 3: Điền vào dấu ... kết quả thích hợp để được công thức đúng:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\ldots\ldots$

b) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\ldots\ldots$

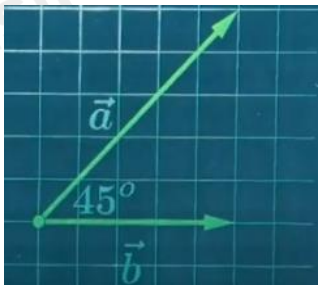
c) Cho ABCD là hình bình hành: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$.

d) Gọi I là trung điểm của AB. Khi đó:

$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\ldots\ldots\Leftrightarrow\forall M:\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\ldots..$

e) Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Khi đó: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\ldots\ldots\Leftrightarrow\forall M:\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\ldots..$

Câu 4: Cho hình vẽ sau (cạnh của mỗi ô vuông là 1cm), trả lời các ý sau:



a) Tìm độ dài của $\vec{a}$, $\vec{b}$.

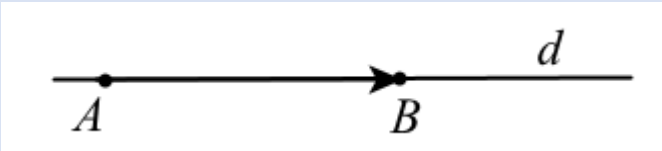
b) Góc giữa hai vecto $\vec{a},\vec{b}$

c) Tích vô hướng của hai vecto $\vec{a},\vec{b}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng 1: [Tên dạng]

Câu 1: Cho hình vẽ dưới đây. Nối mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để được khẳng định đúng.



A	B
1. Điểm đầu của vecto $\overrightarrow{AB}$	a. B
2. Điểm cuối của vecto $\overrightarrow{AB}$	b. D
3. Giá của vecto $\overrightarrow{AB}$	c. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=AB$
4. Độ dài của vecto $\overrightarrow{AB}$	d. A

Cách giải:

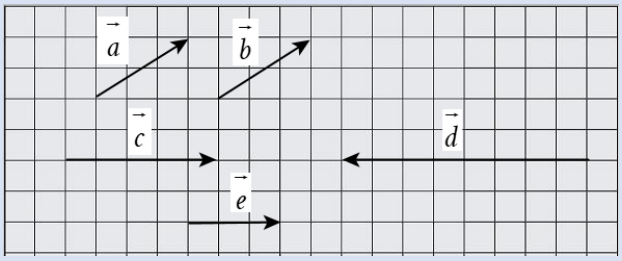
1 – d

2 – a

3 – b

4 – c

Câu 2: Cho hình vẽ sau (cạnh của mỗi ô vuông dài 1cm). Đánh dấu × vào các ô trống để thể hiện đúng mối quan hệ của các vecto (cùng phương, không cùng phương, cùng hướng, ngược hướng)



Cách giải:

Cặp vecto	Không cùng phương	Cùng phương	Cùng hướng	Ngược hướng	Độ dài	
$\vec{a}$ và $\vec{c}$	×					
$\vec{a}$ và $\vec{b}$		×	×		$\left\|\vec{a}\right\|=\left\|\vec{b}\right\|$	$\vec{a}=\vec{b}$
$\vec{e}$ và $\vec{c}$		×	×		$\frac{\left\|\vec{e}\right\|}{\left\|\vec{c}\right\|}=\frac{3}{5}$	$\vec{e}=\frac{3}{5}\vec{c}$
$\vec{d}$ và $\vec{c}$		×		×	$\frac{\left\|\vec{d}\right\|}{\left\|\vec{c}\right\|}=\frac{7}{5}$	$\vec{d}=-\frac{4}{5}\vec{c}$

Câu 3: Điền vào dấu ... kết quả thích hợp để được công thức đúng:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\ldots\ldots$

b) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\ldots\ldots$

c) Cho ABCD là hình bình hành: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$.

d) Gọi I là trung điểm của AB. Khi đó:

$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\ldots\ldots\Leftrightarrow\forall M:\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\ldots..$

e) Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Khi đó: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\ldots\ldots\Leftrightarrow\forall M:\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\ldots..$

Cách giải:

Điền vào dấu ... kết quả thích hợp để được công thức đúng:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$

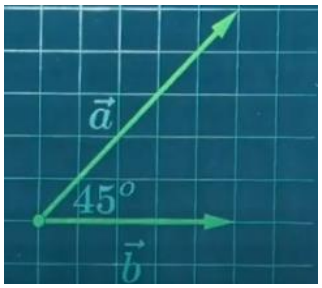
c) Cho ABCD là hình bình hành: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

d) Gọi I là trung điểm của AB. Khi đó:

$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\forall M:\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

e) Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Khi đó: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\forall M:\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

Câu 4: Cho hình vẽ sau (cạnh của mỗi ô vuông là 1cm), trả lời các ý sau:



a) Tìm độ dài của $\vec{a}$, $\vec{b}$.

b) Góc giữa hai vecto $\vec{a},\vec{b}$

c) Tích vô hướng của hai vecto $\vec{a},\vec{b}$

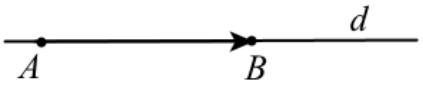
Cách giải:

a) $\left|\vec{b}\right|=5cm;\left|\vec{a}\right|=5\sqrt{2}cm$

b) Góc giữa hai vecto $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=45^0$

c) Tích vô hướng của hai vecto $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=5\sqrt{2}.5.cos45^0=25$

1 KHÁI NIỆM VECTO TRONG KHÔNG GIAN



Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

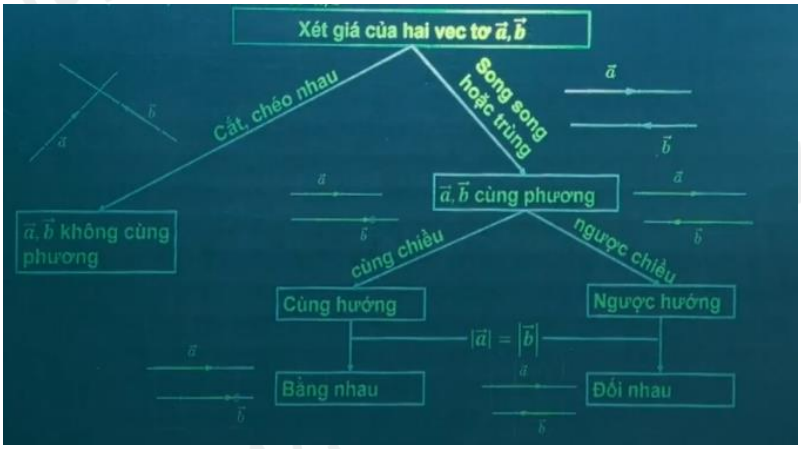
Chú ý:

-Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A, điểm cuối là B thì ta có một vectơ, kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vecto" AB"

- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a},\vec{b},\vec{u},\vec{v},\ldots$

Các khái niệm có liên quan đến vectơ trong không gian như: giá, độ dài của vecto; vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng, vecto không, hai vecto bằng nhau, hai vecto đối nhau, được phát biểu tương tự như trong mặt phẳng.

Xét mối quan hệ của hai vecto $\vec{a},\vec{b}$.



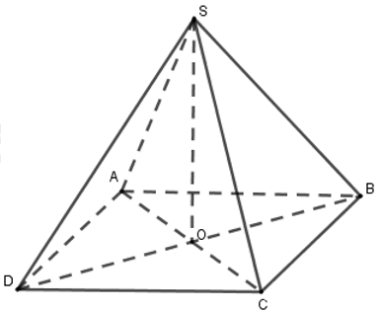
Ví dụ 1. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD.

a) Chỉ ra các vectơ có điểm đầu là S và điểm cuối là các đỉnh của đa giác đáy.

b) Tìm các vectơ có độ dài bằng độ dài của vectơ $\overrightarrow{SA}$.

c) Tìm các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{CB}$.

Cách giải:



a) $\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}$

b) $\left|\overrightarrow{SA}\right|=SA$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{SB}\right|=\left|\overrightarrow{SC}\right|=\left|\overrightarrow{SD}\right|=\left|\overrightarrow{SA}\right|$

c) Các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{CB}$: $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}$.

2 CÁC PHÉP TOÁN TRÊN VECTO

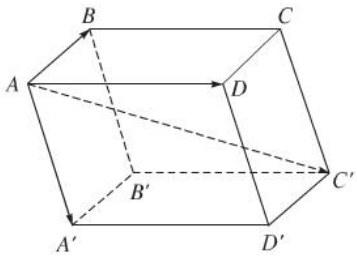
1. Tổng và hiệu của hai vecto trong không gian

- Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là phép cộng vecto.

- Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vecto trong mặt phẳng, chẳng hạn: Phép cộng vectơ trong không gian cũũng có các tính chất giao hoán, kết hợp, cộng với vecto-không. Do đó, ta cũng định nghĩa được tổng của ba vecto trong không gian.

- Khi thực hiện phép cộng vectơ trong không gian, ta vẫn có thể áp dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành như đối với vecto trong mặt phẳng.

Các quy tắc:



- Với ba điểm A, B, C trong không gian, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (Quy tắc ba điểm);

- Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (Quy tắc hình bình hành).

- Vól ba điểm O, A, B trong không gian, ta có: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ (Quy tắc hiệu).

- Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$ (Quy tắc hình hộp).

2. Tích một số với một vectơ trong không gian

Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vecto $\vec{a}$ là một vectoo, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vecto $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vecto $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}, k\vec{0} = \vec{0}$.

Chú ý:

- Phép láy tich của một số vời một vectơ gọi là phép nhân một số với một vecto:
- Phép nhân một số với một vectơ trong không gian có các tính chất sau:

Với hai vecto bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực h, kta có:

i) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$

ii) $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ iii) $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$

iv) $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$ - Hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ là cùng phương khi và chi khi có một số thực $k \neq 0$ sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$

3. Tích vô hướng của hai vecto trong không gian

a) Góc giữa hai vecto

Trong không gian, cho hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm 0 tuỳ ý và vẽ hai vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Góc giữa hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$ trong không gian là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.

Chú ý:

i) $0^\circ \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$.

ii) $(\vec{a}, -\vec{b}) = (-\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ - (\vec{a}, \vec{b})$

iii) $(-\vec{a}, -\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b})$

b) Tích vô hướng của hai vecto

Trong không gian, cho hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}, \vec{b}$, là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$,

ở đó $(\vec{a}, \vec{b})$ là góc giữa hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$.

Quy ước: Tích vô hướng của một vecto bất kì với vecto $\vec{0}$ bằng 0.

Chú ý:

- Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian có các tính chất sau:

Với các vecto bất kì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số thực k tuỳ ý, ta có:

+ $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán);

$+\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (tính chất phân phối);

$+(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$

$+\vec{a}^2\geq 0$, trong đỏo $\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$. Ngoài ra, $\vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$.

- Nếu $\vec{a},\vec{b}$ là hai vecto khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

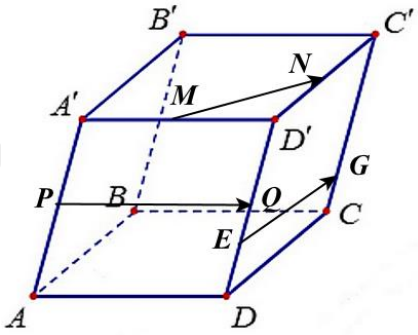
Đặc biệt $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$

III. BA VECTO ĐỒNG PHẲNG

1 Định nghĩa

Trong không gian, ba vecto được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'D',D'C',AA',DD'$. Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng DQ, G là điểm nằm trên cạnh CC' sao cho $CC'=4CG$. Hỏi



a) Ba vecto $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{EG}$ có đồng phẳng không?

b) Ba vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA}$ có đồng phẳng không?

Cách giải:

a) Ta có: $MN//(ABC)$

$$\left.\begin{array}{l}PQ//AD\subset(ABCD)\\PQ\not\subset(ABCD)\end{array}\right\}\Rightarrow PQ//(ABCD)$$

$$DEGC \text{ là hình bình hành } \Rightarrow \left.\begin{array}{l}EG//CD\subset(ABCD)\\EG\not\subset(ABCD)\end{array}\right\}\Rightarrow EG//(ABCD)$$

Ba vecto $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{EG}$ đồng phẳng.

b) Ba vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA}$ không đồng phẳng.

Nhận xét: Người ta cũng chứng minh được một số điều kiện sau đây đđà ba vecto trong không gian là đờng phẳng:

1. Trong không gian, cho hai vecto $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương và vecto $\vec{c}$. Khi đó, ba vecto $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$. Ngoài ra, cặp số m, n là duy nhất.

2. Trong không gian, cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đều khác vecto-không. Từ điểm O trong không gian, ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Khi đó, ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng khi và chi khi bốn điểm O, A, B, C cùng thuộc một mặt phẳng.

Cách giải:

Ví dụ 2a) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD'}+\overrightarrow{DM'}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'D'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{D'C'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EQ}$

$\Rightarrow$ Đồng phẳng.

2. Sự phân tích vectơ

Nếu $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng thì với vecto $\vec{v}$ bất kì, ta đều tìm được các số m, n, p sao cho:

$\vec{v}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$.

Hơn nữa các số m, n, p là duy nhất.