BÀI GIẢNG: CỰC TRỊ HÀM HỢP, LIÊN KẾT
CHUYÊN ĐỀ: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ
MÔN: TOÁN 12
GIÁO VIÊN: NGÔ VĂN TOẢN

PHƯƠNG PHÁP

1. Cực trị hàm hợp $g(x)=f(u(x))$

Phương pháp:

i) Tổng quát: Lập bảng xét dấu $g'(x)=u'(x).f'(u(x))$

ii) Dựa vào nghiệm bội

Số điểm cực trị của $g(x)=$ số điểm cực trị của $u(x)+$ số nghiệm bội lẻ của $f'(u(x))=0$

Bước 1. Giải phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Bước 2. Lập bảng biến thiên $u(x) \Rightarrow$ Dạng đồ thị $u(x)$

i) Đếm số cực trị $u(x)$ (2)

ii) Đếm số nghiệm bội lẻ $f'(u)=0 \Leftrightarrow u=a$

Vẽ đường thẳng $y=a \Rightarrow$ Đếm số giao điểm của $\begin{cases} y=u \\ y=a \end{cases}$

2. Cực trị hàm liên kết $g(x)=f(x)+h(x)$

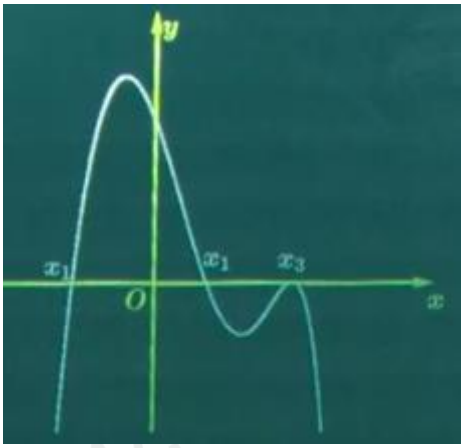
Phương pháp:

i) Tổng quát: Lập bảng xét dấu $g'(x)=f'(x)+h'(x)$

ii) Dựa vào nghiệm bội của $g'(x)=0$.

ĐỀ BÀI

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị trên một khoảng K như hình vẽ bên.



Trong các khẳng định sau, có tất cả bao nhiêu khẳng định đúng?

(I): Trên K, hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

(II): Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_3.

(III): Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_1.

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-2)^2(x+3)^3(x-5)^4$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên R và có bảng xét đấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

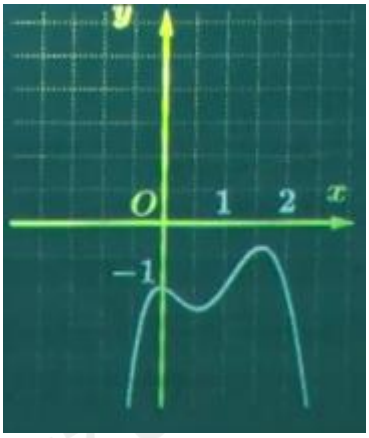
Xét hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2x\right)$.

a) Tính $g'(x)$

b) Tìm các nghiệm của $g'(x) = 0$

c) Lập bảng xét dấu $g(x)$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$. Biết đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x) + x$.



a) Tính $g'(x)$

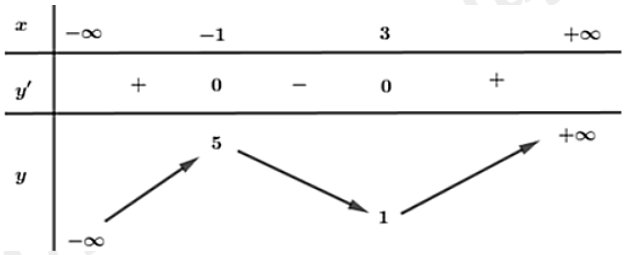
b) Tìm nghiệm $g'(x)=0$

c) Lập bảng xét dấu $g'(x)$

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)(x-3)^2$.

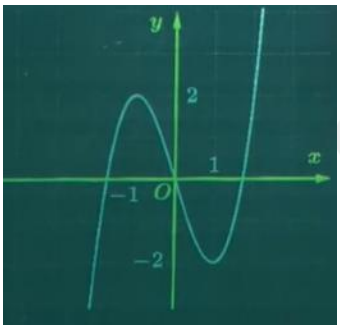
Tìm số cực trị của hàm số $y=f(2x+1)$

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biên thiên như hình dưới số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-4x+1\right)$ là



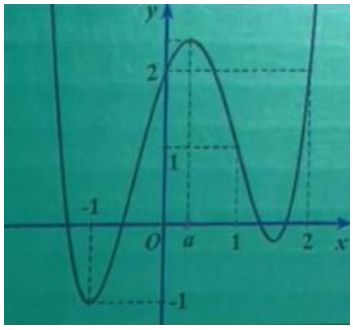
A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên R và có đồ thị như hình vẽ sau. Số cực trị của hàm số $g=[f(x)]^2$ là

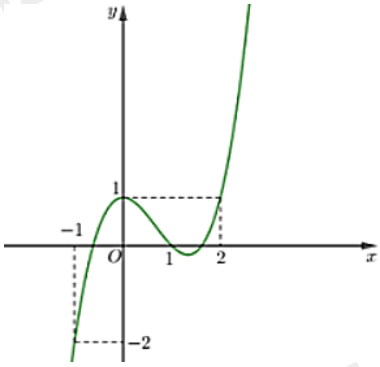


A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

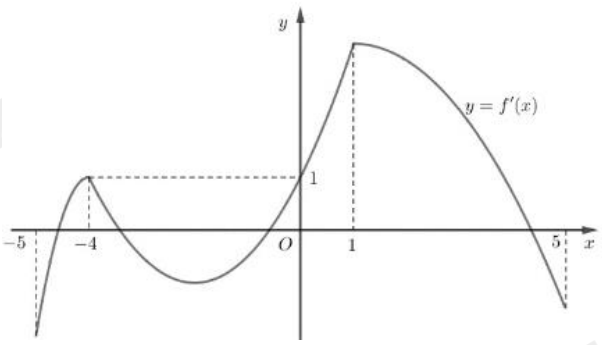
Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên **R** và đồ thị hàm số $f'(x)$ cho bởi hình vẽ. Biết hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}, \forall x\in\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $g(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên R. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ có bao nhiêu diểm cực đại?

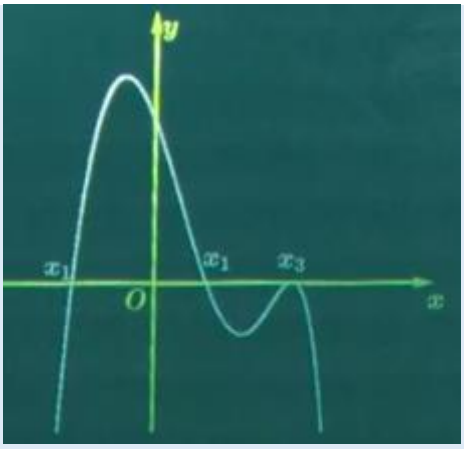


Câu 10: Cho hàm số $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x)$ có đạo hàm liten tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $y = f'(x)$ nhur hình vẽ bên. Hàm số $g = f\left(x^2 + 4x\right) - x^2 - 4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;1)$?



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị trên một khoảng K như hình vẽ bên.



Trong các khẳng định sau, có tất cả bao nhiêu khẳng định đúng?

(I): Trên K, hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

(II): Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_3.

(III): Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_1.

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Cách giải:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{x_1; x_2; x_3\}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘		↗		↘			

Vậy $(I),(III)$ đúng; (II) sai

Chọn A.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-2)^2(x+3)^3(x-5)^4$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Cách giải:

Nhận thấy đạo hàm có hai nghiệm bội lẻ nên có hai điểm cực trị.

Chọn B.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đo hàm trên R và có bảng xét đấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x\right)$.

a) Tính $g'(x)$

b) Tìm các nghiệm của $g'(x)=0$

c) Lập bảng xét dấu $g(x)$

Cách giải:

a) $g'(x)=(2x-2)f'\left(x^2-2x\right)$.

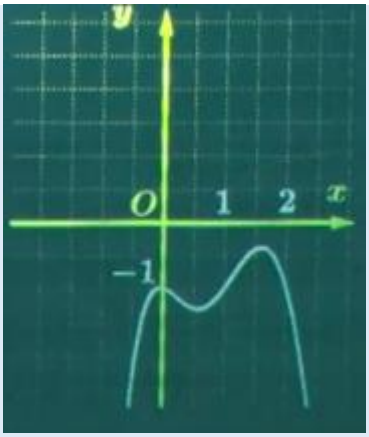
b) $g'(x)=0\Leftrightarrow(2x-2)f'\left(x^2-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\f'\left(x^2-2x\right)=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x=-2\\x^2-2x=1\\x^2-2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1\pm\sqrt{2}\\x=-1\\x=3\end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↘		↗		↗		↘	

Số điểm cực trị của $f(u)=$ số điểm cực trị của hàm $u(x)$ + số nghiệm bội lẻ của $f'(u)=0$, $u=a$ (a là nghiệm của phương trình $f'(x)=0$)

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$. Biết đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(x)+x$.



a) Tính $g'(x)$

b) Tìm nghiệm $g'(x)=0$

c) Lập bảng xét dấu $g'(x)$

Cách giải:

a) $g'(x)=f'(x)+1$

b) $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-1\ (*)$

Nghiệm của phương trình $(*)$ trùng với hoành độ giao điểm của $\left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=f'(x) \end{array}\right.$

$(*)$ có 3 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

c) Lập bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘		↗		↘			

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)(x-3)^2$.

Tìm số cực trị của hàm số $y=f(2x+1)$.

Cách giải:

$g'(x)=2f'(2x+1)=0$

$\Leftrightarrow 2x+1=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

$\Rightarrow$ Hàm số có 1 điểm cực trị.

Nhận xét: Số điểm cực trị $f(x)$ = số điểm cực trị $g(x)=ax+b,(a\neq 0)$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biên thiên như hình dưới số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-4x+1\right)$ là

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Cách giải:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$$

$u=x^2-4x+1$

$u'=0\Leftrightarrow 2x-4=0\Leftrightarrow x=2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		$+\infty$
g'		$-$	0		
g		$\searrow$	-3	$\nearrow$	

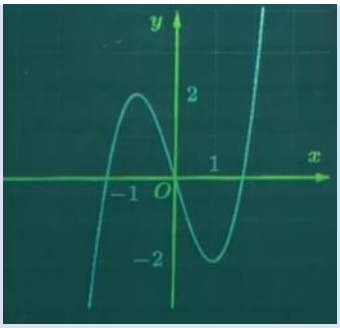
Số điểm cực trị u là 1.

$$f'(u)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=-1\\u=3\end{array}\right.$$

Vậy có 5 điểm cực trị.

Chọn B.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên R và có đồ thị như hình vẽ sau. Số cực trị của hàm số $g=[f(x)]^2$ là



A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Cách giải:

$g' = 2f'(x).f(x) = 0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \quad (1) \\ f'(x) = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

Số nghiệm bội lẻ của (1) = số giao điểm không tiếp xúc với Ox.

$\Rightarrow (1)$ có 3 nghiệm bội lẻ.

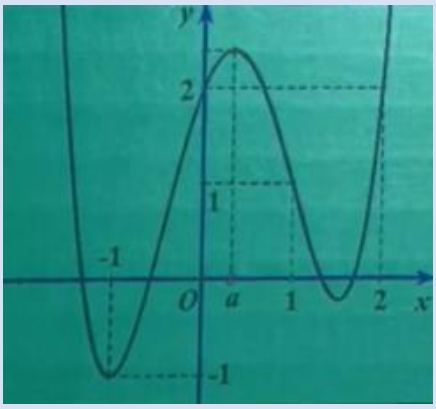
Số nghiệm bội lẻ của $f^2(x) = 0 =$ số điểm cực trị $f(x)$.

$\Rightarrow (2)$ có hai nghiệm bội lẻ.

Vậy có 5 nghiệm bội lẻ.

Chọn A.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên **R** và đồ thị hàm số $f'(x)$ cho bởi hình vẽ. Biết hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $g(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

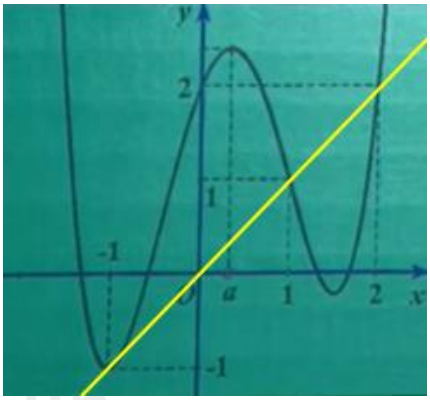


Cách giải:

$g' = f'(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x \quad (*)$.

Nghiệm của $(*)$ trùng với hoành độ giao điểm của hai đường thẳng $\left\{\begin{array}{l} y = f'(x) \\ y = x \end{array}\right.$

Đường thẳng d đi qua $(1;1);(2;2)$.

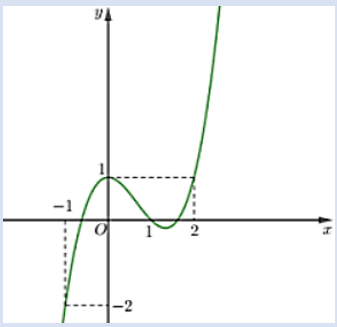


Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\Rightarrow$ 2 điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên R. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+2$ có bao nhiêu diểm cực đại?

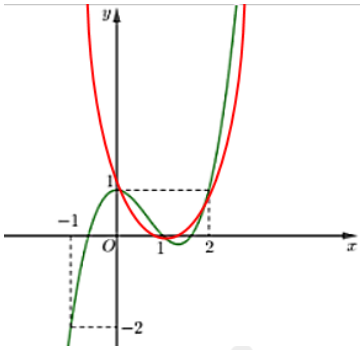


Cách giải:

$g'(x)=f'(x)-x^2+2x-1=0$.

$\Leftrightarrow f'(x)=x^2-2x+1(*)$

Tìm hoành độ giao điểm $\begin{cases} y=f'(x) \\ y=x^2-2x+1 \end{cases}$

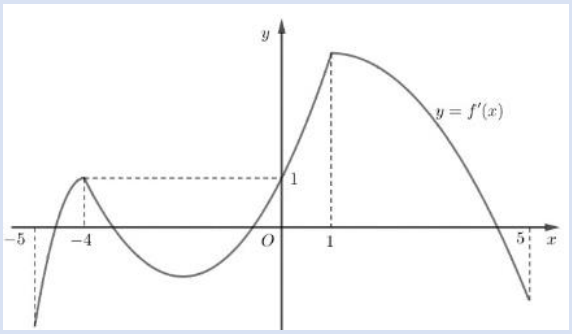


$(*)$ có 3 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Chọn A.

Câu 10: Cho hàm số $\mathbf{y}=\mathbf{f}(x)$ có đạo hàm liten tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $y=f'(x)$ nhur hình vẽ bên. Hàm số $g=f\left(x^2+4x\right)-x^2-4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;1)$?



Cách giải:

$g'\left(x\right)=\left(2x+4\right)f'\left(x^2+4x\right)-\left(2x+4\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(2x+4\right)\left[f'\left(x^2+4x\right)-1\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2x+4=0\Leftrightarrow x=-2 \\ f'\left(x^2+4x\right)-1=0\ (*) \end{array}\right.$

Xét $(*)$ ta có: $f'\left(x\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^2+4x=-4 \\ x^2+4x=0\ \ (1) \\ x^2+4x=a\left(1<a<5\right)\ (2) \end{array}\right.$

Phương trình $(1),(2)$ có hai nghiệm bội lẻ. Vậy có 4 cực trị.