BÀI GIẢNG: BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH CHẤT

CHUYÊN ĐỀ: PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

MÔN: TOÁN 9 KNTTVCS

GIÁO VIÊN: ĐỖ VĂN BẢO

MỤC TIÊU

- ✓ *Nhắc lại thứ tự trên tập hợp số thực.*
- ✓ *Nhận biết bất đẳng thức.*
- ✓ *Phát biểu các tính chất của bất đẳng thức.*
- ✓ *Áp dụng giải bài tập và một số bài toán thực tế.*

Bài toán mở đầu:

Khi đi đường, chúng ta có thể thấy các biển báo giao thông báo hiệu giới hạn tốc độ mà xe cơ giới được phép đi.

Em có biết ý nghĩa của biển báo giao thông ở Hình 2.4 (biển báo giới hạn tốc độ tối đa cho phép theo xe, trên từng làn đường) không?



Hình 2.4. Biển báo giao thông P.127c

Chứng minh rằng:

a) $x^2+y^2 \ge 2xy$ b) $x+y \ge 2\sqrt{xy}\ (x \ge 0;\ y \ge 0)$

c) $(x+y)^2 \ge 4xy$ d) $\dfrac{1}{xy} \ge \dfrac{4}{(x+y)^2}\ (x \ge 0,\ y \ge 0)$

1 Bất đẳng thức

Nhắc lại thứ tự trên tập số thực

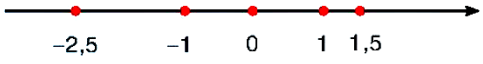
Trên tập số thực, với hai số a và b có ba trường hợp sau:

a) Số a bằng số b, kí hiệu $a=b$;

b) Số a lớn hơn số b, kí hiệu $a>b$;

c) Số a nhỏ hơn số b, kí hiệu $a<b$.

Khi biểu diễn số thực trên trục số, điểm biểu diễn số bé hơn nằm trước điểm biểu diễn số lớn hơn. Chẳng hạn, $-2,5<-1<1<1,5$.



Số a lớn hơn hoặc bằng số b, tức là $a>b$ hoặc $a=b$, kí hiệu là $a \ge b$.

Số a nhỏ hơn hoặc bằng số b, tức là $a<b$ hoặc $a=b$, kí hiệu là $a \le b$.

Luyện tập 1: Biển báo giao thông R.306 (H.2.5) báo tốc độ tối thiểu cho các xe cơ giới. Biển có hiệu lực bắt buộc các loại xe cơ giới vận hành với tốc độ không nhỏ hơn trị số ghi trên biển trong điều kiện giao thông không thuận lợi và an toàn. Nếu một ô tô đi trên đường đó với tốc độ a (km/h) thì a phải thoả mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau?



Hình 2.5. Biển báo giao thông R.306

A. $a < 60$ **B.** $a > 60$

C. $a \geq 60$ **D.** $a \leq 60$

Chọn C.

Khái niệm bất đẳng thức

Ta gọi hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b$, $a \geq b$, $a \leq b$) là bất đẳng thức và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.

Chú ý:

Hai bất đẳng thức $1 < 2$ và $-3 < -2$ (hay $6 > 3$ và $8 > 5$) được gọi là ***hai bất đẳng thức cùng chiều***. Hai bất đẳng thức $1 < 2$ và $-2 > -3$ (hay $6 > 3$ và $5 < 8$) được gọi là ***hai bất đẳng thức ngược chiều***.

Ví dụ 1: Xác định vế trái và vế phải của các bất đẳng thức sau:

a) $-2 > -7$; b) $a^2 + 1 > 0$

Cách giải:

a) Vế trái là -2, vế phải là -7.

b) Vế trái là $a^2 + 1$, vế phải là 0.

Ví dụ 2: Viết bất đẳng thức để mô tả mỗi tình huống sau:

a) Tuần tới, nhiệt độ t (^{0}C) tại Tokyo là trên -5^0C.

b) Nhiệt độ t (^{0}C) bảo quản của một loại sữa là dưới 4^0C.

c) Để được điều khiển xe máy điện thì số tuổi x của một người phải ít nhất là 16 tuổi.

Cách giải:

a) $t > -5$

b) $t < 4$

c) $x \geq 16$.

Bất đẳng thức có tính chất quan trọng sau:

Nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$ (tính chất bắc cầu của bất đẳng thức)



Chú ý:

Tương tự, các thứ tự lớn hơn (>), lớn hơn hoặc bằng (≥), nhỏ hơn hoặc bằng (≤) cũng có tính chất bắc cầu.

Ví dụ 3: Chứng minh $\frac{2024}{2023} > \frac{2021}{2022}$

Cách giải:

Ta có $\frac{2024}{2023}=1+\frac{1}{2023}>1$ và $\frac{2021}{2022}=1-\frac{1}{2022}<1$ nên $\frac{2024}{2023}>\frac{2021}{2022}$.

Luyện tập 2: Chứng minh rằng:

a) $\frac{2024}{1000}>1,9$ b) $-\frac{2022}{2023}>-1,1$

Cách giải:

a) $\frac{2024}{1000}>2>1,9$

$\frac{2024}{1000}=\frac{2000+24}{1000}=2+\frac{24}{1000}>2>1,9$

b) $-\frac{2022}{2023}=-\left(\frac{2023-1}{2023}\right)=-1+\frac{1}{2023}>-1>-1,1$

$\Rightarrow -\frac{2022}{2023}>-1,1$ (tính chất bắc cầu).

2 Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

Xét bất đẳng thức $-1<2$ (1)

a) Cộng 2 vào hai vế của bất đẳng thức (1) rồi so sánh kết quả thì ta được bất đẳng thức nào?

b) Cộng –2 vào cả hai vế của bất đẳng thức (1) rồi so sánh kết quả thì ta được bất đẳng thức nào?

c) Cộng vào hai vế của bất đẳng thức (1) với cùng một số c thì ta sẽ được bất đẳng thức nào?

Cách giải:

*) $-1<2$ (1)

$-1+2=1$

$2+2=4$

$1<4$ (2)

*) $-1+(-2)=-3$

$2+(-2)=0$

$-3<0$ (3)

*) $-1+c<2+c$

> Với ba số a, b, c, ta có:
>
> Nếu $a<b$ thì $a+c<b+c$.
>
> Nếu $a\le b$ thì $a+c\le b+c$.
>
> Nếu $a>b$ thì $a+c>b+c$.
>
> Nếu $a\ge b$ thì $a+c\ge b+c$.

Khi cộng cùng một số vào hai vế của một bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Ví dụ 4: Không thực hiện phép tính, hãy so sánh $2023+(-19)$ với $2024+(-19)$.

Cách giải:

Vì $2023 < 2024$ nên

$2023 + (-19) < 2024 + (-19)$ ← cộng vào hai vế với cùng số -19.

Luyện tập 3: Không thực hiện phép tính, hãy so sánh:

a) $19 + 2023$ và $-31 + 2023$;

b) $\sqrt{2} + 2$ và 4.

Cách giải:

a) $19 > -31$

$19 + 2023 > -31 + 2023$

b) $\sqrt{2} < 2$

$\sqrt{2} + 2 < 2 + 2$

$\sqrt{2} + 2 < 4$

3 Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

Cho bất đẳng thức $-2 < 5$.

a) Nhân hai vế của bất đẳng thức với 7 rồi so sánh kết quả thì ta được bất đẳng thức nào?

b) Nhân hai vế của bất đẳng thức với -7 rồi so sánh kết quả thì ta được bất đẳng thức nào?

Cách giải:

a) $-2.7 = -14;\ 5.7 = 35;\ -14 < 35$

b) $-2.(-7) = 14;\ 5.(-7) = -35;\ 14 > -35$

- Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một ***số dương*** ta được bất đẳng thức mới ***cùng chiều*** với bất đẳng thức đã cho.

- Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một ***số âm*** ta được bất đẳng thức mới ***ngược chiều*** với bất đẳng thức đã cho.

Ví dụ 5: Thay $\boxed{?}$ trong các biểu thức sau bởi dấu thích hợp (<, >) để được khẳng định đúng.

a) $3.(-7) \boxed{?} 3.(-5)$ b) $(-3).(-7) \boxed{?} (-3).(-5)$

Cách giải:

a) Vì $-7 < -5$ vào $3 > 0$ nên $3.(-7) < 3.(-5)$ ← nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số dương.

b) Vì $-7 < -5$ vào $-3 < 0$ nên $(-3).(-7) > (-3).(-5)$ nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số âm.

Luyện tập 4: Thay $\boxed{?}$ trong các biểu thức sau bởi dấu thích hợp (<, >) để được khẳng định đúng.

a) $13.(-10,5) \boxed{?} 13.11,2$ b) $(-13).(-10,5) \boxed{?} (-13).11,2$

Cách giải:

a) Vì $-10,5 < 11,2$ vào $13 > 0$ nên $13.(-10,5) \boxed{<} 13.11,2$ nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số dương.

b) Vì $-10,5<11,2$ vào $-13<0$ nên $(-13).(-10,5)$ $\boxed{>}$ $(-13).11,2$ nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số âm.

Vận dụng 2: Một nhà tài trợ dự kiến tổ chức một buổi đi dã ngoại tập thể nhằm giúp các bạn học sinh vùng cao trải nghiệm thực tế tại một trang trại trong 1 ngày (từ 14h00 ngày hôm trước đến 12h00 ngày hôm sau). Cho biết số tiền tài trợ dự kiến là 30 triệu đồng và giá thuê các dịch vụ và phòng nghỉ là 17 triệu đồng 1 ngày, giá mỗi suất ăn trưa, ăn tối là 60 000 đồng và mỗi suất ăn sáng là 30 000 đồng. Hỏi có thể tổ chức cho nhiều nhất bao nhiêu bạn tham gia được?

Cách giải:

Tiền ăn nhiều nhất là: 30 – 17 = 13 (triệu đồng)

Tiền ăn 1 học sinh/ngày là: 60 000 + 60 000 + 30 000 = 150 000 (đồng)

Gọi số học sinh là x (học sinh, $x\in\mathbb{N}^*$) thì $150\,000x\le 13\,000\,000$

$$x\le 86.67$$

=> Số học sinh tối đa là 86 học sinh.

4 Bài tập áp dụng

2.6. Dùng kí hiệu để viết bất đẳng thức tương ứng với mỗi trường hợp sau:

a) x nhỏ hơn hoặc bằng –2;

b) m là số âm;

c) y là số dương;

d) p lớn hơn hoặc bằng 2024.

2.7. Viết một bất đẳng thức phù hợp trong mỗi trường hợp sau:

a) Bạn phải ít nhất 18 tuổi mới được phép lái ô tô;

b) Xe buýt chở được tối đa 45 người;

c) Mức lương tối thiểu cho một giờ làm việc của người lao động là 20 000 đồng.

2.8. Không thực hiện phép tính, hãy chứng minh:

a) $2.(-7)+2023<2.(-1)+2023$;

b) $(-3).(-8)+1975>(-3).(-7)+1975$.

2.9. Cho a < b, hãy so sánh:

a) 5a + 7 và 5b + 7;

b) -3a – 9 và -3b – 9.

2.10. Hãy so sánh hai số a và b, nếu:

a) a + 1954 < b + 1954

b) -2a > -2b.

2.11. Chứng minh rằng:

a) $-\frac{2023}{2024}>-\frac{2024}{2023}$

b) $\frac{34}{11}>\frac{26}{9}$

Bài tập áp dụng. Chứng minh rằng:

a) $x^2+y^2\ge 2xy$

b) $x+y\ge 2\sqrt{xy}\ (x\ge 0;\ y\ge 0)$

c) $(x+y)^2\ge 4xy$

d) $\frac{1}{xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2}\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$

HƯỚNG DẪN GIẢI

2.6. Dùng kí hiệu để viết bất đẳng thức tương ứng với mỗi trường hợp sau:

a) x nhỏ hơn hoặc bằng –2;

b) m là số âm;

c) y là số dương;

d) p lớn hơn hoặc bằng 2024.

Cách giải:

a) $x \le -2$

b) $m < 0$

c) $y > 0$

d) $p \ge 2024$

2.7. Viết một bất đẳng thức phù hợp trong mỗi trường hợp sau:

a) Bạn phải ít nhất 18 tuổi mới được phép lái ô tô;

b) Xe buýt chở được tối đa 45 người;

c) Mức lương tối thiểu cho một giờ làm việc của người lao động là 20 000 đồng.

Cách giải:

a) $x \ge 18$

b) $y \le 45$

c) $z \ge 20000$

2.8. Không thực hiện phép tính, hãy chứng minh:

a) $2.(-7)+2023 < 2.(-1)+2023$;

b) $(-3).(-8)+1975 > (-3).(-7)+1975$.

Cách giải:

a) $-7 < -1 \Rightarrow 2.(-7) < 2.(-1)$

$\Rightarrow 2.(-7)+2023 < 2.(-1)+2023$

b) $-8 < -7 \Rightarrow (-3).(-8) > (-3).(-7)$

$\Rightarrow (-3).(-8)+1975 > (-3).(-7)+1975$

2.9. Cho a < b, hãy so sánh:

a) 5a + 7 và 5b + 7;

b) -3a – 9 và -3b – 9.

Cách giải:

a) $a < b \Rightarrow 5a < 5b \Rightarrow 5a+7 < 5b+7$

b) $a < b \Rightarrow -3a > -3b \Rightarrow -3a-9 > -3b-9$

2.10. Hãy so sánh hai số a và b, nếu:

a) a + 1954 < b + 1954

b) $-2a > -2b$.

Cách giải:

a) $a+1954<b+1954$

$\Rightarrow a+1954-1954<b+1954-1954$

$\Rightarrow a<b$

b) $-2a>-2b$

$\Rightarrow -2a.\left(-\frac{1}{2}\right)<-2b.\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow a<b$

2.11. Chứng minh rằng:

a) $-\frac{2023}{2024}>-\frac{2024}{2023}$

b) $\frac{34}{11}>\frac{26}{9}$

Cách giải:

a) $\frac{2023}{2024}<1<\frac{2024}{2023}\Rightarrow\frac{2023}{2024}<\frac{2024}{2023}\Rightarrow-\frac{2023}{2024}>-\frac{2024}{2023}$ (đpcm).

$\Rightarrow a+1954-1954<b+1954-1954$

$\Rightarrow a<b$

b) $\frac{34}{11}=\frac{33+1}{11}=3+\frac{1}{11}>3$ (1)

$\frac{26}{9}<\frac{27}{9}=3$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow\frac{34}{11}>\frac{26}{9}$.

Bài tập áp dụng. Chứng minh rằng:

a) $x^2+y^2\geq 2xy$

b) $x+y\geq 2\sqrt{xy}\ (x\geq 0;\ y\geq 0)$

c) $(x+y)^2\geq 4xy$

d) $\frac{1}{xy}\geq\frac{4}{(x+y)^2}\ (x\geq 0,\ y\geq 0)$

Cách giải:

a) $x^2-2xy+y^2\geq 2xy-2xy\Leftrightarrow(x-y)^2\geq 0$ (nháp).

Ta có: $(x-y)^2\geq 0$ với mọi x, y

$x^2-2xy+y^2\geq 0\Rightarrow x^2+y^2\geq 2xy$ (đpcm).

b) Ta có $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\geq 0$ với mọi x, y ≥ 0

$\Rightarrow x+y-2\sqrt{xy}\geq 0\Rightarrow x+y\geq 2\sqrt{xy}\ (x,y\geq 0)$

c) $VT = x^2 + 2xy + y^2$

(a) $x^2 + y^2 \ge 2xy \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 \ge 2xy + 2xy$

$\Rightarrow (x+y)^2 \ge 4xy$

d) (c) $\Rightarrow (x+y)^2 \ge 4xy > 0$ (với mọi x, y > 0)

$\Rightarrow \dfrac{1}{(x+y)^2} \le \dfrac{1}{4xy} \Rightarrow \dfrac{4}{(x+y)^2} \le \dfrac{1}{xy}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{xy} \ge \dfrac{4}{(x+y)^2}$

$\Rightarrow \dfrac{x+y}{xy} \ge \dfrac{4}{x+y} \Rightarrow \dfrac{x}{xy} + \dfrac{y}{xy} \ge \dfrac{4}{x+y}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y} \Rightarrow ...$