BÀI GIẢNG: NGUYÊN HÀM TIẾT 1
CHUYÊN ĐỀ: NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN
MÔN: TOÁN 12 (KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG)
GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

MỤC TIÊU

- ✓ *Nhận biết khái niệm nguyên hàm của một hàm số.*
- ✓ *Giải thích một số tính chất của nguyên hàm.*
- ✓ *Tìm nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp thường gặp.*



Một máy bay di chuyển ra đến đường băng và bắt đầu chạy đà để cất cánh. Giả sử vận tốc của máy bay khi chạy đà được cho bởi $v(t)=5+3t(\mathrm{m/s})$, với t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi máy bay bắt đầu chạy đà. Sau 30 giây thì máy bay cất cánh rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển từ khi bắt đầu chạy đà đến khi rời đường băng là bao nhiêu mét? Ta cần tìm quãng đường $S(t)$ mà máy bay di chuyển được sau t giây kể từ lúc bắt đầu chạy đà. Từ ý nghĩa cơ học của đạo hàm, ta biết rằng $S'(t)=v(t)$. Như vậy, ta cần tìm một hàm số có đạo hàm bằng hàm số $v(t)$ đã cho. Bài toán này dẫn đến một khái niệm quan trọng trong Toán học, đó là khái niệm nguyên hàm.

I. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT HÀM SỐ

HĐ1 Nhận biết khái niệm nguyên hàm

Cho hai hàm số $f(x)=x^2+1$ và $F(x)=\frac{1}{3}x^3+x$, với $x\in\mathbb{R}$.

a) Tính đạo hàm của hàm số $F(x)$.

b) Nêu nhận xét về mối quan hệ giữa $F'(x)$ và $f(x)$.

Cách giải:

a) $F'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)'=x^2+1$

b) $F'(x)=f(x)$.

Kết luận:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng K (hoặc một đoạn, hoặc một nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi x thuộc K.

Chú ý. Trường hợp $K=[a;b]$ thì các đẳng thức $F'(a)=f(a)$ và $F'(b)=f(b)$ được hiểu là đạo hàm bên phải tại điểm $x=a$ và đạo hàm bên trái tại điểm $x=b$ của hàm số $F(x)$, tức là

$$\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=f(a) \text{ và } \lim_{x\to b^-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}=f(b).$$

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)=x^2-2x$. Trong các hàm số cho dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$?

$$F(x)=\frac{x^3}{3}-x^2;\quad G(x)=\frac{x^3}{3}+x^2$$

Cách giải:

Ta có: $F'(x)=x^2-2x, G'(x)=x^2+2x$.

Vì $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $G(x)$ không là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ vì với $x=1$, ta có $G'(1)=3\neq -1=f(1)$.

Luyện tập 1. Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x+\frac{1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$?

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x;\quad G(x)=\frac{x^2}{2}-\ln x.$$

Cách giải:

a) Ta có: $F'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+\ln x\right)'=x+\frac{1}{x}$

vi $F'(x)=f(x)$ với mọi x thuộc $(0;+\infty)$ nên F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên $(0;+\infty)$.

b) $G'(x)=\left(\frac{x^2}{2}-\ln x\right)'=x-\frac{1}{x}$

G(x) không phải là một nguyên hàm của f(x) trên $(0;+\infty)$ vì với $x=1$ ta có: $G'(1)=0\neq 2=f(1)$

HĐ2 Nhận biết họ nguyên hàm của một hàm số

Cho hàm số $f(x)=x^3$.

a) Chứng minh rằng hàm số $F(x)=\frac{x^4}{4}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $G(x)=\frac{x^4}{4}+C$ (với C là hằng số) có là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ không? Vì sao?

Cách giải:

a) Ta có: $F'(x)=x^3=f(x)$ nên F(x) là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

b) Ta có: $G'(x)=x^3=f(x)$ nên G(x) là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Kết luận:

Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Khi đó:

a) Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K;

b) Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$ với mọi $x\in K$.

Như vậy, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$ (C là hằng số). Ta gọi $F(x)+C(C\in\mathbb{R})$ là họ các nguyên hàm của $f(x)$ trên K, kí hiệu bởi $\int f(x)dx$.

Chú ý

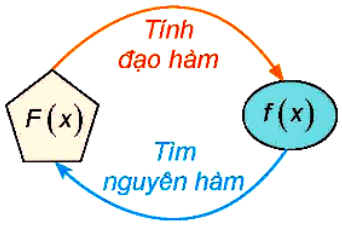
a) Để tìm họ các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số $f(x)$ trên K, ta chỉ cần tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên K và khi đó

$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C, C$ là hằng số

b) Người ta chứng minh được rằng hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K thì $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.

c) Biểu thức $f(x)dx$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$, kí hiệu là $\mathrm{d}F(x)$. Vậy $\mathrm{d}F(x)=F'(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$

d) Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K, ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định



Hình 4.2. Mối quan hệ giữa đạo hàm và nguyên hàm

Ví dụ 2. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2$ trên $\mathbb{R}$. Từ đó hãy tìm $\int x^2dx$.

Cách giải:

Vì $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{3x^2}{3}=x^2$ nên $F(x)=\frac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Do đó, $\int x^2\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+C$

Luyện tập 2. Tìm $\int x^3dx$.

Cách giải:

Vì $\left(\frac{x^4}{4}\right)'=x^3$ nên $F(x)=\frac{x^4}{4}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3$ trên $\mathbb{R}$.

Do đó, $\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C$

II. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM

HĐ3 **Khám phá nguyên hàm của tích một hàm số với một hằng số khác 0**

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên K, k là một hằng số khác 0 . Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

a) Chứng minh $kF(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $kf(x)$ trên K.

b) Nêu nhận xét về $\int kf(x)\mathrm{d}x$ và $k\int f(x)\mathrm{d}x$.

Cách giải:

a) Vì F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên K nên $F'(x)=f(x)$ nên $kF'(x)=kf(x)$ (với k khác 0). Do đó, $kF(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $kf(x)$ trên K.

b) Ta có: $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

Kết luận:

$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x(k\neq 0).$

Ví dụ 3. Sử dụng kết quả của Ví dụ 2, hãy tìm:

a) $\int 3x^2\,\mathrm{d}x$; b) $\int -\frac{3}{2}x^2dx$.

Cách giải:

a) $\int 3x^2\,\mathrm{d}x=3\int x^2\,\mathrm{d}x=3\cdot\frac{x^3}{3}+C=x^3+C$.

b) $\int -\frac{3}{2}x^2dx=-\frac{3}{2}\int x^2dx=-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+C=-\frac{1}{2}x^3+C$.

Luyện tập 3. Cho hàm số $f(x)=x^n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

a) Chứng minh rằng hàm số $F(x)=\frac{x^{n-1}}{n+1}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Từ đó tìm $\int x^n\,\mathrm{d}x$

b) Từ kết quả câu a, tìm $\int kx^n\,\mathrm{d}x$ (k là hằng số khác 0).

Cách giải:

a) Ta có: $F'(x)=\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\frac{(n+1)x^n}{n+1}=x^n=f(x)$ nên hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Do đó, $\int x^ndx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$.

b) $\int kx^ndx=k\int x^ndx=\frac{k\cdot x^{n+1}}{n+1}+C$.

HĐ4 **Khám phá nguyên hàm của một tổng**

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K, $G(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$ trên K.

a) Chứng minh $F(x)+G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)+g(x)$ trên K.

b) Nêu nhận xét về $\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$ và $\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$.

Kết luận:

$$\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$$
$$\int[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x-\int g(x)\mathrm{d}x$$

Ví dụ 4. Sử dụng kết quả của Luyện tập 3 và tính chất cơ bản của nguyên hàm, hãy tìm:

a) $\int\left(x^2+x\right)dx$

b) $\int\left(4x^3-3x^2\right)dx$.

Cách giải:

Ta có:

a) $\int\left(x^2+x\right)dx=\int x^2dx+\int xdx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C$.

b) $\int\left(4x^3-3x^2\right)\mathrm{d}x=4\int x^3\,\mathrm{d}x-3\int x^2\,\mathrm{d}x=x^4-x^3+C$.

Luyện tập 4. Tìm:

a) $\int\left(3x^2+1\right)dx$;

b) $\int(2x-1)^2dx$.

Cách giải:

a) $\int\left(3x^2+1\right)dx=3\int x^2dx+\int 1dx=x^3+x+C$;

b) $\int(2x-1)^2dx=\int\left(4x^2-4x+1\right)dx=4\int x^2dx-4\int xdx+\int dx=\frac{4x^3}{3}-2x^2+x+C$

Ví dụ 5. Giải bài toán trong tình huống mở đầu.

Cách giải:

Gọi $S(t)(0\le t\le 30)$ là quãng đường máy bay di chuyển được sau t giây kể từ lúc bắt đầu chạy đà.

Ta có $v(t)=S'(t)$. Do đó, $S(t)$ là một nguyên hàm của hàm số vận tốc $v(t)$. Sử dụng tính chất của nguyên hàm ta được

$$S(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int(5+3t)\mathrm{d}t=5\int\mathrm{d}t+3\int t\,\mathrm{d}t=5t+\frac{3}{2}t^2+C.$$

Theo giả thiết, $S(0)=0$ nên $C=0$ và ta được $S(t)=\frac{3}{2}t^2+5t(\text{m})$.

Máy bay rời đường băng khi $t=30$ (giây) nên $S=S(30)=\frac{3}{2}\cdot 30^2+5\cdot 30=1500(\text{m})$.

Vậy quãng đường máy bay đã di chuyển từ khi bắt đầu chạy đà đến khi nó rời đường băng là $S=1500\,\text{m}$.

Vận dụng. Doanh thu bán hàng của một công ty khi bán một loại sản phẩm là số tiền $R(x)$ (triệu đồng) thu được khi x đơn vị sản phẩm được bán ra. Tốc độ biến động (thay đổi) của doanh thu khi x đơn vị sản phẩm đã được bán là hàm số $M_R(x)=R'(x)$. Một công ty công nghệ cho biết tốc độ biến động của doanh thu khi bán một loại con chíp của hãng được cho bởi $M_R(x)=300-0,1x$, ở đó x là số lượng chíp đã bán. Tìm doanh thu của công ty khi đã bán 1000 con chíp.

Hướng dẫn: Vì $R'(x)=M_R(x)$ nên doanh thu $R(x)$ là một nguyên hàm của $M_R(x)$.

Ta có:

$$\int M_R(x)dx=\int(300-0,1x)dx=300\int dx-0,1\int xdx=300x-0,05x^2+C$$

Do đó, $R(x)=300x-0,05x^2+C$

Ta có: $R(0)=0$ nên $C=0$. Do đó, $R(x)=300x-0,05x^2$

Doanh thu của công ty khi đã bán 1000 con chíp là:

$R(1000)=300.1000-0,05.1000^2=250000$ (triệu đồng)