BÀI GIẢNG: TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN
CHUYÊN ĐỀ: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG
MÔN: TOÁN LỚP 9
GIÁO VIÊN: LÊ TRỌNG HIẾU

MỤC TIÊU

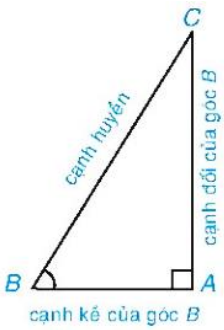
✓ *Áp dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn để chứng minh một số bài toán có liên quan.*

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

Cho góc nhọn $\alpha\ (0° < \alpha < 90°)$. Dựng ΔABC vuông tại A sao cho $\alpha = \angle ABC$.

Từ đó ta có: $\sin\alpha = \dfrac{AC}{BC}$, $\cos\alpha = \dfrac{AB}{BC}$, $\tan\alpha = \dfrac{AC}{AB}$, $\cot\alpha = \dfrac{AB}{AC}$



Các tỉ số lượng giác của góc nhọn α	Công thức
Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là sin của góc α, kí hiệu $\sin\alpha$	$\sin\alpha = \dfrac{AC}{BC}$
Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là côsin của góc α, kí hiệu $\cos\alpha$	$\cos\alpha = \dfrac{AB}{BC}$
Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là tang của góc α, kí hiệu $\tan\alpha$	$\tan\alpha = \dfrac{AC}{AB}$
Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là côtang của góc α, kí hiệu $\cot\alpha$	$\cot\alpha = \dfrac{AB}{AC}$

2 Một số công thức đặc biệt

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$ $\qquad$ $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3 Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

Định lí: Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia

Cụ thể ta có: Nếu $\alpha + \beta = 90°$ thì $\sin\alpha = cos\beta$, $\cos\alpha = sin\beta$, $\tan\alpha = cot\beta$, $\tan\beta = cot\alpha$

ĐỀ BÀI

Câu 1: Chứng minh giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào số đo góc nhọn α

a) $A=\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha$

b) $B=(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2$

c) $C=\dfrac{\cot^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cot^2\alpha}+\dfrac{\sin\alpha.\cos\alpha}{\cot\alpha}$

Câu 2: Cho góc nhọn α

a) Biết $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$. Tính $A=\dfrac{\tan\alpha+3\cot\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}$

b) Biết $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$. Tính $B=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

Câu 3: Biết $\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Tính các tỉ số lượng giác còn lại của góc $15°$

Câu 4: Tam giác ABC có diện tích S và đường cao $AH=h$. Cho biết $S=h^2$.

Chứng minh rằng $\cot B+\cot C=2$

Câu 5: Cho ΔABC vuông tại B. Lấy điểm M trên cạnh AC. Kẻ $AH\perp BM$, CK $\perp BM$

a) Chứng minh $CK=BH\tan\angle BAC$

b) Chứng minh $\dfrac{MC}{MA}=\dfrac{BH\tan^2\angle BAC}{BK}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Chứng minh giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào số đo góc nhọn α

a) $A=\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha$

b) $B=(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2$

c) $C=\dfrac{\cot^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cot^2\alpha}+\dfrac{\sin\alpha.\cos\alpha}{\cot\alpha}$

Cách giải:

a) $A=\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha$

$A=(\cos^2\alpha)^2+2\cos^2\alpha.\sin^2\alpha+(\sin^2\alpha)^2$

$A=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2=1,\ \forall\alpha$ nhọn

Vậy giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào độ lớn của góc nhọn α

b) $B=(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2$

$B=\cos^2\alpha+2\cos\alpha.\sin\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cos\alpha.\sin\alpha+\sin^2\alpha$

$B=2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=2.1=2$

Vậy giá trị của biểu thức B không phụ thuộc vào độ lớn của góc nhọn α

c) $C=\dfrac{\cot^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cot^2\alpha}+\dfrac{\sin\alpha.\cos\alpha}{\cot\alpha}$

$C=\dfrac{\cot^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin\alpha.\cos\alpha.\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cot^2\alpha}$

$C=\dfrac{\cot^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cot^2\alpha}=\dfrac{\cot^2\alpha}{\cot^2\alpha}=1$

Vậy giá trị của biểu thức C không phụ thuộc vào độ lớn của góc nhọn α

Câu 2: Cho góc nhọn α

a) Biết $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$. Tính $A=\dfrac{\tan\alpha+3\cot\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}$

b) Biết $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$. Tính $B=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

Cách giải:

a) $A=\dfrac{\tan\alpha+3\cot\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}$

$A=(\tan\alpha+3\cot\alpha):(\tan\alpha+\cot\alpha)$

$A=\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{3\cos\alpha}{\sin\alpha}\right):\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

$$A=\frac{\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}.\frac{\sin\alpha.\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$$

$$A=\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha\ \left(do\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\right)$$

$$A=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+2\cos^2\alpha$$

$$A=1+2\cos^2\alpha$$

$$A=1+2.\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{17}{8}$$

b) Chia cả tử và mẫu của B cho $\cos\alpha\neq 0$

$$B=\frac{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$$

Thay $\tan\alpha=\frac{1}{2}$, ta được $B=\left(1+\frac{1}{2}\right):\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}:\frac{1}{2}=3$

Câu 3: Biết $\sin 15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Tính các tỉ số lượng giác còn lại của góc $15°$

Cách giải:

Ta có: $\sin^2 15°+\cos^2 15°=1\Rightarrow\cos^2 15°=1-\sin^2 15°=1-\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{4}$

$$\cos^2 15°=\frac{16-6+2\sqrt{12}-2}{16}=\frac{8+2\sqrt{12}}{16}=\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{16}$$

$$\Rightarrow\cos 15°=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{16}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15°=\frac{\sin 15°}{\cos 15°}=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{8-2\sqrt{12}}{4}=\frac{8-4\sqrt{3}}{4}=2-\sqrt{3}$$

$$\cot 15°=\frac{1}{\tan 15°}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$$

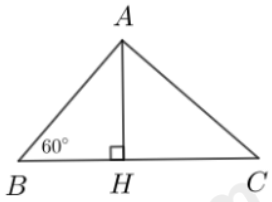
Câu 4: Tam giác ABC có diện tích S và đường cao $AH=h$. Cho biết $S=h^2$.

Chứng minh rằng $\cot B+\cot C=2$

Cách giải:

Xét ΔAHB vuông tại H, có $\cot B=\frac{BH}{AH}=\frac{BH}{h}\ (1)$

Xét ΔAHC vuông tại H, có $\cot C=\frac{HC}{AH}=\frac{HC}{h}\ (2)$



Ta có: $\cot B+\cot C=\frac{BH}{h}+\frac{HC}{h}=\frac{BH+HC}{h}=\frac{BC}{h}$

Mặt khác: $S=h^2$ nên $\frac{1}{2}BC.AH=h^2$ hay $BC.h=2h^2$

Do đó $BC=\frac{2h^2}{h}=2h$

Vậy $\cot B+\cot C=\frac{BC}{h}=\frac{2h}{h}=2$