BÀI GIẢNG: LUYỆN TẬP CHUNG: MỘT SỐ HỆ THỨC GIỮA CẠNH, GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG VÀ ỨNG DỤNG

CHUYÊN ĐỀ: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

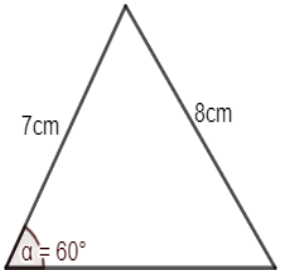
MÔN: TOÁN 9 KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

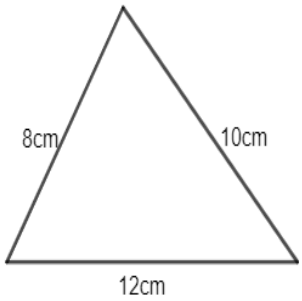
GIÁO VIÊN: ĐỖ VĂN BẢO

MỤC TIÊU

- ✓ *Nhắc lại các tỉ số lượng giác của góc nhọn.*
- ✓ *Nhắc lại một số hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông.*
- ✓ *Giải tam giác vuông, tam giác thường khi biết một số yếu tố.*
- ✓ *Áp dụng giải bài tập và một số bài toán thực tế.*

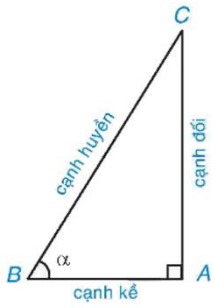
Bài toán mở đầu : Giải các tam giác sau





I. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC NHỌN

Cho góc nhọn α. Xét tam giác ABC vuông tại A có góc nhọn B bằng α (H.4.5).



Hình 4.5

- Tỉ số giữa cạnh đối của góc α và cạnh huyền gọi là sin của α, kí hiệu sin α.
- Tỉ số giữa cạnh kề của góc α và cạnh huyền gọi là côsin của α, kí hiệu $\cos\alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề của góc α gọi là tang của α, kí hiệu $\tan\alpha$.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối của góc α gọi là côtang của α, kí hiệu $\cot\alpha$.

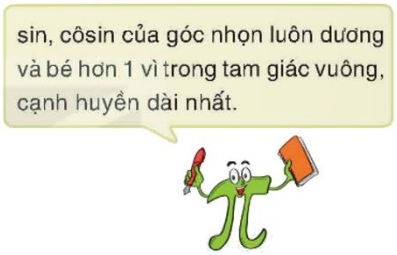
Chú ý. Ta có:

- $\sin\alpha = \dfrac{\text{Cạnh đối}}{\text{Cạnh huyền}}$; $\cos\alpha = \dfrac{\text{Cạnh kề}}{\text{Cạnh huyền}}$

$\tan\alpha = \dfrac{\text{Cạnh đối}}{\text{Cạnh kề}}$; $\cot\alpha = \dfrac{\text{Cạnh kề}}{\text{Cạnh đối}}$

- $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

- $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ gọi là các tỉ số lượng giác của góc nhọn α.



α	30°	45°	60°
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

II. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU

Xét tam giác ABC vuông tại A. Viết các tỉ số lượng giác của góc B và C.

$\sin B = \frac{AC}{BC}$; $\cos B = \frac{AB}{BC}$

$\tan B = \frac{AC}{AB}$; $\cot B = \frac{AB}{AC}$

$\sin C = \frac{AB}{BC}$; $\cos C = \frac{AC}{BC}$

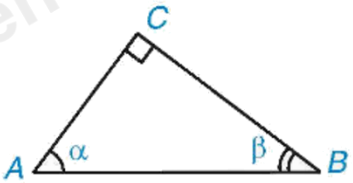
$\tan C = \frac{AB}{AC}$ $\cot C = \frac{AC}{AB}$

$\sin B = \cos C$; $\sin C = \cos B$

$\tan B = \cot C$; $\cot B = \tan C$

$\sin \alpha = \cos \beta$; $\sin \beta = \cos \alpha$

$\tan \alpha = \cot \beta$; $\cot \alpha = \tan \beta$



Định lí

Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia.

Chú ý. Cho α và β là hai góc phụ nhau (H.4.9), khi đó:

$\sin \alpha = \cos \beta$, $\cos \alpha = \sin \beta$, $\tan \alpha = \cot \beta$, $\cot \alpha = \tan \beta$.

Ta có bài thơ:

Nếu mà hai đứa phụ nhau

Sin em bằng cos anh sau vẫn chờ

Tang mình bằng côtang ta

Còn sin trên cos chắc là bằng tang...

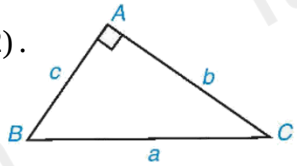


III. HỆ THỨC GIỮA CẠNH HUYỀN VÀ CẠNH GÓC VUÔNG

Công thức tính cạnh góc vuông theo cạnh huyền và sin, côsin của các góc nhọn

Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền a và các cạnh góc vuông b, c (H.4.12).

a) Viết các tỉ số lượng giác sin, côsin của góc B và góc C theo độ dài các cạnh của tam giác ABC.



Hình 4.12

b) Tính mỗi cạnh góc vuông b và c theo cạnh huyền a và các tỉ số lượng giác nói trên của góc B và góc C.

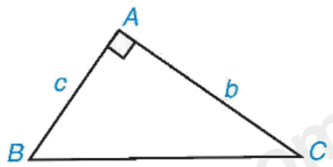
Định lí 1

Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với côsin góc kề.

IV. HỆ THỨC GIỮA HAI CẠNH GÓC VUÔNG

Công thức tính cạnh góc vuông theo cạnh góc vuông kia và tang, côtang của các góc nhọn

Xét tam giác ABC trong Hình 4.16.



Hình 4.16

a) Viết các tỉ số lượng giác tang, côtang của góc B và góc C theo b, c.

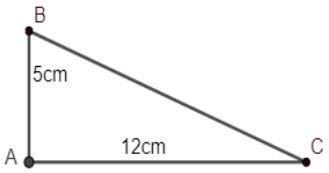
b) Tính mỗi cạnh góc vuông b và c theo cạnh góc vuông kia và các tỉ số lượng giác nói trên của B và góc C.

Định lí 2

Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc nhân với côtang góc kề.

IV. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 5cm$, $AC = 12cm$.



a)Tính các tỉ số lượng giác của góc B

b)Từ kết quả câu a) suy ra các tỉ số lượng giác của góc C.

Cách giải :

a)Xét tam giác ABC vuông tại A.

Cách1: Theo định lí Pythagore, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$, suy ra $BC = 13\text{cm}$

Ta có : $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}, \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{13}, \tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{5}, \cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}$.

Cách 2: Ta có:

$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{5} \Rightarrow \hat{B} = 67,38^\circ \approx 67,23'$

$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{BC} \Rightarrow BC = \frac{12}{\sin B} = 13(cm)$

b)Do $B + C = 90^\circ$ nên $\sin C = \cos B = \frac{5}{13}, \cos C = \sin B = \frac{12}{13}, \tan C = \cot B = \frac{5}{12}, \cot C = \tan B = \frac{12}{5}$

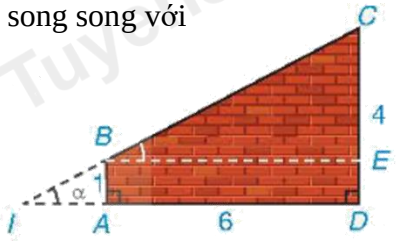
Ví dụ 2: Một bức tường đang xây dở có dạng hình thang vuông $ABCD$ vuông góc ở A và $D, AB = 1\text{m}$, $CD = 4\text{m}, AD = 6\text{m}$.

a)Hỏi góc α tạo bởi đường thẳng BC và mặt đất AD có số đo xấp xỉ bằng bao nhiêu (làm tròn đến phút)?

b)Tính độ dài cạnh BC (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

Cách giải:

a) Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC .Qua B kẻ đường thẳng song song với AD (mặt đất) cắt CDại E thì khi đó $EBC = DIC = \alpha$ (hai góc đồng vị).



Tứ giác $ABED$ có $BE//AD, AB//DE, A = 90^\circ$ nên $ABED$ là hình chữ nhật

Do đó $BE = AD = 6\,\text{m}, EC = CD - ED = 4 - 1 = 3(\text{m})$.

Xét ΔBCE vuông tại E , ta có $\tan\alpha = \tan EBC = \dfrac{EC}{BE} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. Từ đó tính được $\alpha \approx 26^\circ 34'$.

b)Cách 1: Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác BEC vuông tại E , ta có :

$BC^2 = BE^2 + EC^2 = 6^2 + 3^2 = 45$. Suy ra $BC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6,7(\text{m})$.

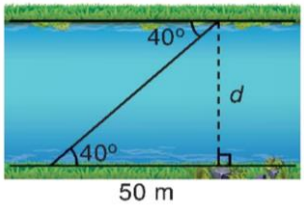
Cách 2: Tam giác BEC vuông tại E nên $EC = BC \cdot \sin\alpha$ suy ra $BC = \dfrac{EC}{\sin\alpha} = \dfrac{3}{\sin 26^\circ 34'} \approx 6,7(\text{m})$

ĐỀ BÀI

4.14: Một cuốn sách khổ $17 \cdot 24cm$, tức là chiều rộng 17 cm, chiều dài 24 cm. Gọi α là góc giữa đường chéo và cạnh 17 cm. Tính $\sin\alpha, \cos\alpha$ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) và tính số đo α (làm tròn đến độ)

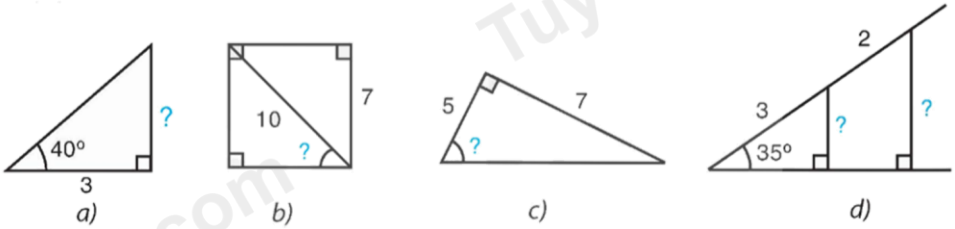
4.15: Cho tam giác ABC có chân đường cao AH nằm giữa B và C . Biết $HB = 3cm, HC = 6cm, HAC = 60^\circ$. Hãy tính độ dài các cạnh (làm tròn đến cm), số đo các góc tam giác ABC (làm tròn đến độ)

4.16: Tìm chiều rộng d của dòng sông trong Hình 4.27 (làm tròn đến m).



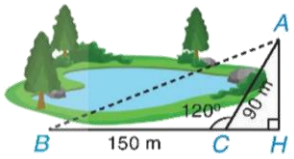
Hình 4.27

4.17: Tính các số liệu còn thiếu (dấu "?") ở Hình 4.28 với góc làm tròn đến độ, với độ dài làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.



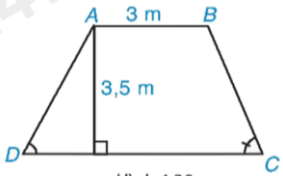
Hình 4.28

4.18: Một bạn muốn tính khoảng cách giữa hai địa điểm A , B ở hai bên hồ nước. Biết rằng các khoảng cách từ một điểm C đến A và đến B là $CA = 90\,\text{m}, CB = 150\,\text{m}$ và $ACB = 120^\circ$ (H.4.29). Hãy tính AB giúp bạn.



Hình 4.29

4.19: Mặt cắt ngang của một đập ngăn nước có dạng hình thang ABCD(H.4.30). Chiều rộng của mặt trên AB của đập là 3m. Độ dốc của sườn AD, tức là $\tan D = 1,25$. Độ dốc của sườn BC, tức là $\tan C = 1,5$. Chiều cao của đập là $3,5\text{m}$. Hãy tính chiều rộng CD của chân đập, chiều dài của các sườn AD và BC (làm tròn đến dm).

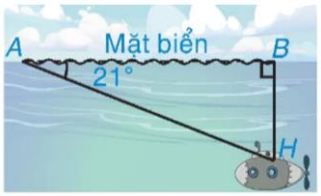


Hình 4.30

4.20: Trong một buổi tập trận, một tàu ngầm đang ở trên mặt biển bắt đầu di chuyển theo đường thẳng tạo với mặt nước biển một góc 21° để lặn xuống (H.4.31).

a) Khi tàu chuyển động theo hướng đó và đi được 200 m thì tàu ở độ sâu bao nhiêu so với mặt nước biển? (làm tròn đến m).

b) Giả sử tốc độ của tàu là 9km/h thì sau bao lâu (tính từ lúc bắt đầu lặn) tàu ở độ sâu $200\ m$ (tức là cách mặt nước biển $200\ m$)?



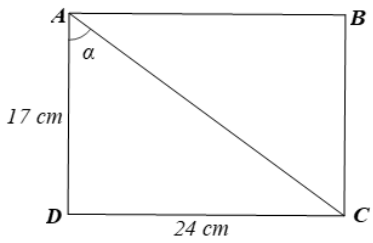
Hình 4.31

HƯỚNG DẪN GIẢI

4.14: Một cuốn sách khổ $17 \cdot 24cm$, tức là chiều rộng 17 cm, chiều dài 24 cm. Gọi α là góc giữa đường chéo và cạnh 17 cm. Tính $\sin\alpha, \cos\alpha$ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) và tính số đo α (làm tròn đến độ)

Cách giải:

Xét ΔADC vuông tại D, áp dụng định lí Pythagore ta có:



$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$\Rightarrow AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{24^2 + 17^2} = \sqrt{865}$ (cm)

Vậy $\sin\alpha = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{24}{\sqrt{865}} \approx 0.82$; $\cos\alpha = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{17}{\sqrt{855}} \approx 0,58$

$\Rightarrow \alpha \approx 54,69^\circ = 54^\circ 41'$

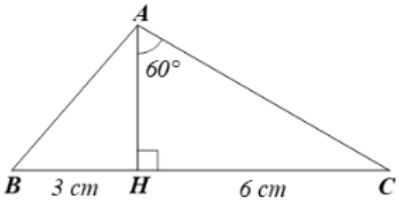
4.15: Cho tam giác ABC có chân đường cao AH nằm giữa B và C. Biết $HB = 3cm, HC = 6cm, HAC = 60^\circ$. Hãy tính độ dài các cạnh (làm tròn đến cm), số đo các góc tam giác ABC (làm tròn đến độ)

Cách giải:

Xét ΔAHC có: $HAC + C = 90^\circ \Rightarrow C = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$; $BC = BH + HC = 3 + 6 = 9$(m)

$\sin HAC = \dfrac{HC}{AC} \Rightarrow AC = \dfrac{HC}{\sin HAC} = \dfrac{HC}{\sin 60^\circ} = \dfrac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6 \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{12}{\sqrt{3}} \Rightarrow AC \approx 7$(cm)

$\cos HAC = \cos 60^\circ = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AH = \dfrac{12}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow AH \approx 3,5$(cm)



Xét ΔABH vuông tại H, áp dụng định lí pythagore ta có:

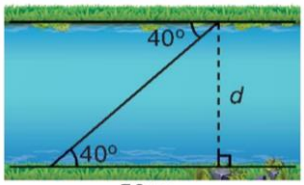
$AB^2 = BH^2 + AH^2 = \left(\dfrac{6}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3^2 = 21 \Rightarrow AB = \sqrt{21} \approx 4,6$ (cm)

$\tan \text{HBA} = \tan B = \dfrac{\text{AH}}{\text{BH}} = \dfrac{\frac{6}{\sqrt{3}}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow B = 49^\circ$

Xét ΔABC có: $\text{BAC} + \text{ACB} + \text{ABC} = 180^\circ$

Suy ra $\text{BAC} = 180^\circ - \text{CAB} - \text{CBA} = 180^\circ - 30^\circ - 49^\circ = 101^\circ$.

4.16: Tìm chiều rộng d của dòng sông trong Hình 4.27 (làm tròn đến m).



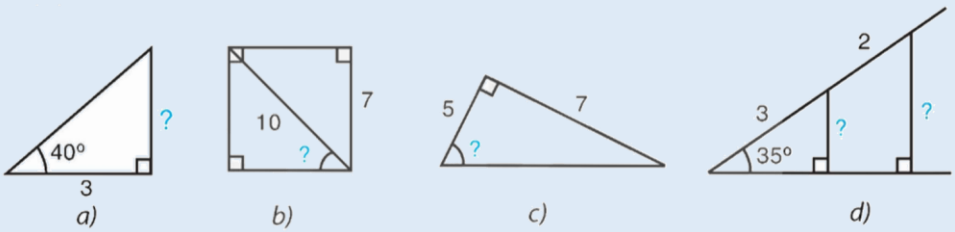
Hình 4.27

Cách giải:

Ta có: $\tan 40^\circ = \dfrac{d}{50}$ suy ra $d = 50 \cdot \tan 40^\circ \approx 42(\text{m})$.

Vậy chiều rộng của dòng sông khoảng 42 m

4.17: Tính các số liệu còn thiếu (dấu "?") ở Hình 4.28 với góc làm tròn đến độ, với độ dài làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.



a) b) c) d)

Hình 4.28

Cách giải:

a)Gọi độ dài cần tìm là x. Ta có: $\tan 40^\circ = \dfrac{x}{3}$ suy ra $x = 3 \cdot \tan 40^\circ \approx 2,5$.

b)Gọi số đo góc cần tìm là α. Ta có $\sin\alpha = \dfrac{7}{10} = 0,7$ suy ra $\alpha \approx 44^\circ$.

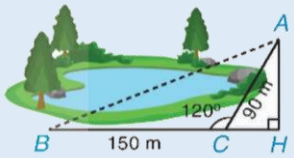
c)Gọi số đo góc cần tìm là β. Ta có $\tan\beta = \dfrac{7}{5}$ suy ra $\beta \approx 54^\circ$.

d)Gọi độ dài cạnh góc vuông nhỏ và độ dài cạnh góc vuông lớn lần lượt là y, z

Ta có: $\sin 35^\circ = \dfrac{a}{3}$, suy ra $a = 3 \cdot \sin 35^\circ \approx 1,7$.

$\sin 35^\circ = \dfrac{b}{5}$, suy ra $b = 5 \cdot \sin 35^\circ \approx 2,9$.

4.18: Một bạn muốn tính khoảng cách giữa hai địa điểm A, B ở hai bên hồ nước. Biết rằng các khoảng cách từ một điểm C đến A và đến B là $CA = 90\,\text{m}, CB = 150\,\text{m}$ và $ACB = 120^\circ$ (H.4.29). Hãy tính AB giúp bạn.



Hình 4.29

Cách giải:

Ta có: $BCA + ACH = 180^\circ$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow ACH = 180^\circ - BCA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Xét ΔAHC vuông tại H, ta có:

$AH = AC \cdot \sin ACH = 90 \cdot \sin 60^\circ = 90 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 45\sqrt{3}(\text{m})$.

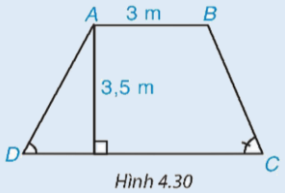
$CH = AC \cdot \cos ACH = 90 \cdot \cos 60^\circ = 90 \cdot \dfrac{1}{2} = 45(\text{m})$.

Ta có : $BH = BC + CH = 150 + 45 = 195(m)$

Xét ΔAHB vuông tại H, theo định lí Pythagore ta có:

$AB^2 = AH^2 + HB^2 = (45\sqrt{3})^2 + 195^2 = 44100 \Rightarrow AB = \sqrt{44100} = 210(m)$

4.19: Mặt cắt ngang của một đập ngăn nước có dạng hình thang $ABCD$(H.4.30). Chiều rộng của mặt trên AB của đập là $3\,m$. Độ dốc của sườn AD, tức là $\tan D = 1,25$. Độ dốc của sườn BC, tức là $\tan C = 1,5$. Chiều cao của đập là $3,5\,m$. Hãy tính chiều rộng CD của chân đập, chiều dài của các sườn AD và BC (làm tròn đến dm).



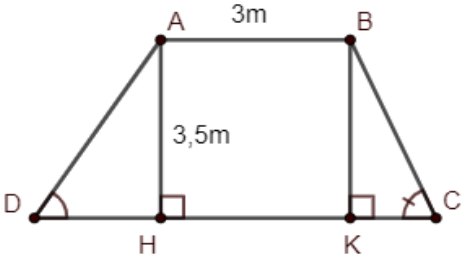
Hình 4.30

Cách giải:

Kẻ BK vuông góc với DC tại K và AH vuông góc với DC tại H nên hình thang có hai đường cao là AH và BK ; $BK = AH = 3,5m$

Xét tứ giác $ABKH$ có: $AH // BK; AH = BK; AHK = 90^\circ$

Nên $ABKH$ là hình chữ nhật $\Rightarrow HK = AB = 3\,m$



Xét ΔADH vuông tại H, ta có: $\tan D = \dfrac{AH}{DH}$ hay $1,25 = \dfrac{3,5}{DH}$

$\Rightarrow DH = \dfrac{3,5}{1,25} = 2,8m = 28dm$

$AD^2 = DH^2 + AH^2 = 3,5^2 + 2,8^2 = 20,09 \Rightarrow AD = \sqrt{20,09} \approx 4,5m = 45dm$

Xét ΔBCK vuông tại K, ta có; $\tan C = \dfrac{BK}{KC}$ hay $1,5 = \dfrac{3,5}{KC} \Rightarrow KC = \dfrac{3,5}{1,5} = \dfrac{7}{3} \approx 2,3\,m = 23dm$

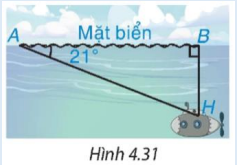
$BC^2 = BK^2 + KC^2 = 3,5^2 + 2,3^2 = 17,54 \Rightarrow BC = \sqrt{17,54} \approx 4,2m = 42dm$

Độ dài cạnh DC là: $DC = DH + HK + KC \approx 2,8 + 3 + 2,3 = 8,1m \approx 81dm$

4.20: Trong một buổi tập trận, một tàu ngầm đang ở trên mặt biển bắt đầu di chuyển theo đường thẳng tạo với mặt nước biển một góc 21° để lặn xuống (H.4.31).

a) Khi tàu chuyển động theo hướng đó và đi được 200 m thì tàu ở độ sâu bao nhiêu so với mặt nước biển? (làm tròn đến m).

b) Giả sử tốc độ của tàu là $9\,km/h$ thì sau bao lâu (tính từ lúc bắt đầu lặn) tàu ở độ sâu $200\,m$ (tức là cách mặt nước biển $200\,m$)?



Hình 4.31

Cách giải:

a)Tàu chuyển động theo đường thẳng tạo với mặt nước biển một góc 21° và đi được $200m \Rightarrow AH = 200m$

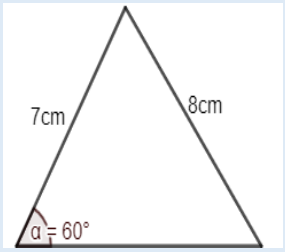
Xét ΔABH vuông tại B, ta có: $\sin BAH = \sin 21^\circ = \dfrac{BH}{AH} \Rightarrow BH = 200 \cdot \sin 21^\circ \approx 72m$

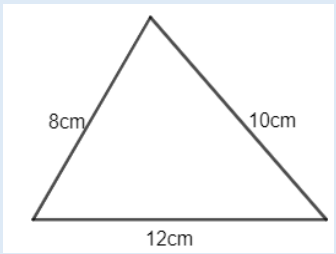
b)Độ sâu của tàu so với mặt nước biển là $BH \Rightarrow BH = 200m$

Xét ΔABH vuông tại B, ta có: $\sin BAH = \sin 21^\circ = \dfrac{BH}{AH} \Rightarrow AH = \dfrac{BH}{\sin 21^\circ} = \dfrac{200}{\sin 21^\circ} \approx 558,1m = 0,5581km$

Vậy thời gian tàu chạy ở độ sâu $200m$ là: $t = \dfrac{AH}{v} = \dfrac{0,5581}{9} = 0,062$ (giờ)

Bài toán mở đầu : giải các tam giác sau



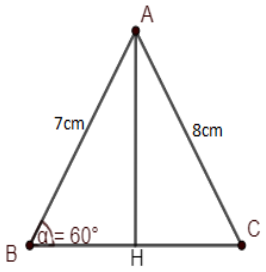


Cách giải:

a) Xét ΔABH vuông tại H ta có:

$$\sin ABH = \sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \cdot \sin 60^\circ = 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2} cm$$

$$\cos ABH = \cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \cdot \cos 60^\circ = 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2} cm$$



Xét ΔAHC vuông tại H, ta có:

$$\sin ACH = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{7\sqrt{3}}{2}}{8} = \frac{7\sqrt{3}}{16} cm \Rightarrow ACH \approx 49,3^\circ$$

$$AH^2 + HC^2 = AC^2 \Rightarrow HC^2 = AC^2 - AH^2 = 8^2 - \left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{109}{4} \Rightarrow HC = \frac{\sqrt{109}}{2} cm$$

Ta có : $BC = BH + HC = \dfrac{7}{2} + \dfrac{\sqrt{109}}{2} \approx 8,72cm$

Xét ΔABC có: $ABC + ACB + BAC = 180^\circ \Rightarrow BAC = 180^\circ - ABC - ACB = 180^\circ - 60^\circ - 49,3^\circ = 70,7^\circ$

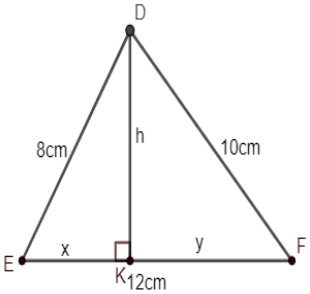
b)Kẻ DK vuông góc EF tại K. Gọi độ dài EK, KF, DK lần lượt là x, y, h

Ta có $EK + KF = EF \Leftrightarrow x + y = 12$

Xét ΔDEK vuông tại K, áp dụng định lí Pythagore ta có:

$$EK^2 + DK^2 = DE^2 \Leftrightarrow x^2 + h^2 = 8^2 \Rightarrow h^2 = 64 - x^2 \ (1)$$

Xét ΔDKF vuông tại K, áp dụng định lí Pythagore ta có:



$KF^2+DK^2=DF^2 \Leftrightarrow y^2+h^2=10^2 \Rightarrow h^2=100-y^2\ (2)$

Từ (1),(2) ta có :

$$\begin{aligned}&64-x^2=100-y^2\\&\Leftrightarrow y^2-x^2=100-64=36\\&\Leftrightarrow (y-x)\cdot(y+x)=36\\&\Leftrightarrow 12\cdot(y-x)=36\\&\Leftrightarrow y-x=3\end{aligned}$$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=12\\-x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{9}{2}\\y=\dfrac{15}{2}\end{cases}$

Xét ΔDEK vuông tại K, ta có: $\cos DEK=\dfrac{EK}{DE}=\dfrac{\frac{9}{2}}{8}=\dfrac{9}{16}\Rightarrow DEK\approx 55,8^\circ$

Xét ΔDKF vuông tại K, ta có: $\cos DFK=\dfrac{FK}{DF}=\dfrac{\frac{15}{2}}{10}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow DFK\approx 41,4^\circ$

Ta có : $DEK+DFK+EDF=180^\circ\Rightarrow EDF=180^\circ-DEK-DFK=180^\circ-55,8^\circ-41,4^\circ=82,8^\circ$