BÀI GIẢNG: VECTO TRONG KHÔNG GIAN
CHUYÊN ĐỀ: VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN
MÔN: TOÁN 12
GIÁO VIÊN: NGUYỄN HOÀNG TÙNG

MỤC TIÊU

- ✓ *Chứng minh đẳng thức*
- ✓ *Phân tích một vectơ thành các vectơ thành phần*
- ✓ *Góc giữa hai vectơ, tích vô hướng giữa hai vectơ*

ĐỀ BÀI

Dạng 1: Chứng minh đẳng thức

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Khi đó $\overrightarrow{GS}=k\overrightarrow{OG}$. Tìm k

Câu 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau?

a) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'A'}$

b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{DC}$

c) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$

d) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BC}$

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$. Tìm k biết $\overrightarrow{OI}=k\left(\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{BD'}+\overrightarrow{DB'}\right)$

A. $-\frac{1}{4}$. **B.** $-\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Dạng 2: Phân tích một vectơ thành các vectơ thành phần

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

c) $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$

d) $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Câu 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên AC và DC' sao cho $MN \parallel BD'$. Tính tỷ số $\dfrac{MN}{BD'}$

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Dạng 3: Góc giữa hai vectơ, tích vô hướng giữa hai vectơ

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\angle BAC = \angle BAD = 60°$. Hãy xác định cặp góc giữa cặp $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$

A. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 30°$. **B.** $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 60°$. **C.** $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 90°$. **D.** $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 45°$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PQ}\right)$

Câu 3: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai vectơ là $45°$. Xét các mệnh đề đúng sai sau:

a) $\vec{a}.\vec{b} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right)\left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) = -5 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 2 + \sqrt{2}$

d) $\left|\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}\right| = 0$

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a, hãy tính:

a) $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC}$

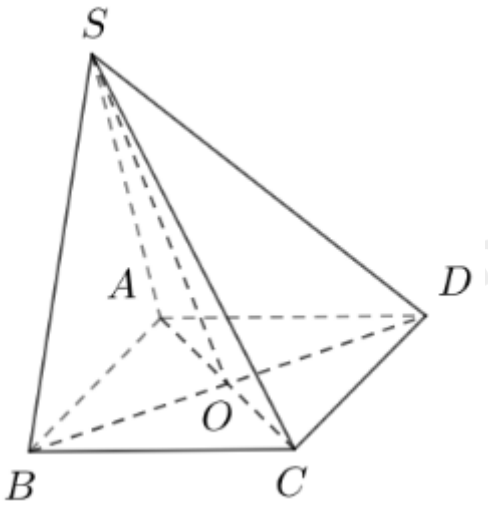
c) $\left|\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right|$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng 1: Chứng minh đẳng thức vectơ

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Khi đó $\overrightarrow{GS}=k\overrightarrow{OG}$. Tìm k

Cách giải:



Ta có:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$

$=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OD}$

$=4\overrightarrow{GO}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

$=4\overrightarrow{GO}$

Do đó $\overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$

Vậy $k=4$

Câu 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau?

a) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'A'}$

b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{DC}$

c) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$

d) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BC}$

Cách giải:

a) Ta có: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B'A'}$

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'A'}$

Do đó ý a đúng

b) Ta có: $\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}$

Do đó ý b đúng

c) Trong hình hộp chữ nhật ta có: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$

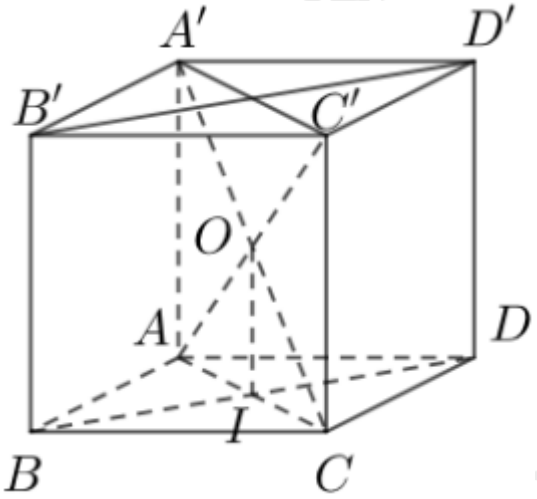
Do đó ý c đúng

d) Từ ý c ta suy ra ý d sai

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$. Tìm k biết $\overrightarrow{OI}=k\left(\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{BD'}+\overrightarrow{DB'}\right)$

A. $-\frac{1}{4}$. **B.** $-\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Cách giải:



Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AC'}=2\overrightarrow{OC'}\\ \overrightarrow{CA'}=2\overrightarrow{OA'}\end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}=2\left(\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OA'}\right)=4\overrightarrow{OI'}=-4\overrightarrow{OI}$

Do đó $\left(\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}\right)+\left(\overrightarrow{BD'}+\overrightarrow{DC'}\right)=-8\overrightarrow{OI}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OI}=-\frac{1}{8}\left(\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{BD'}+\overrightarrow{DB'}\right)$

Chọn B.

Dạng 2: Phân tích một vectơ thành các vectơ thành phần

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

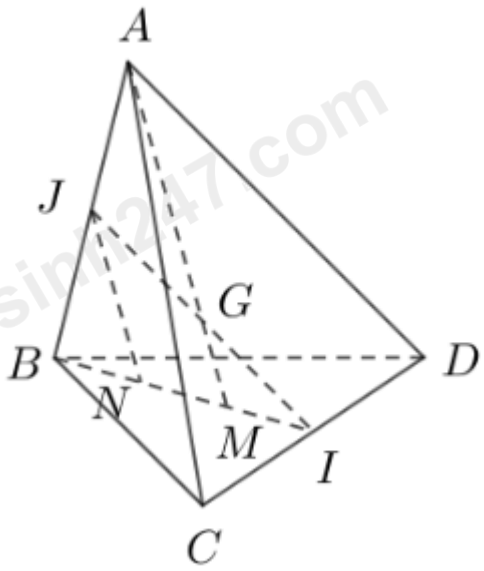
a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

c) $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$

d) $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Cách giải:



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của CD, AB

Ta có:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GJ}+2\overrightarrow{GI}=\vec{0}$

Vậy G là trung điểm của IJ

a) Theo định nghĩa của trọng tâm ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

Do đó ý a đúng

b) Ta có:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

$=4\overrightarrow{OG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)$

$=4\overrightarrow{OG}$

Do đó ý b đúng

c) Ta có:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$

Do đó ý c đúng

d) Gọi M là trọng tâm của tam giác BCD

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

Mà $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

Nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AM}$

Lại có: $\begin{cases} NJ=\dfrac{1}{2}AM \\ NJ=2GM \end{cases} \Rightarrow AM=4GM \Rightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AM}$

Do đó ý d sai

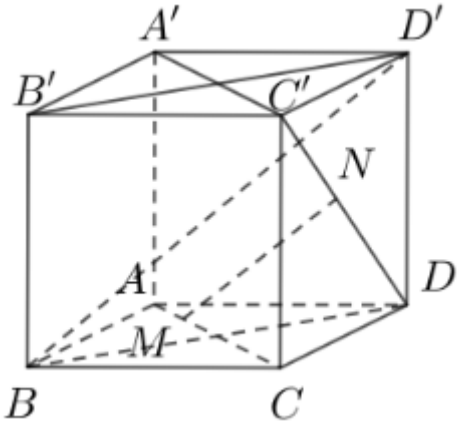
Câu 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên AC và DC' sao cho $MN \parallel BD'$. Tính tỷ số $\dfrac{MN}{BD'}$

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Cách giải:

Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{BC}=\vec{b}, \overrightarrow{BB'}=\vec{c}$

Khi đó $\overrightarrow{BD'}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$



Ta có:

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'N}$

$=m\overrightarrow{AC}+\vec{c}+n\overrightarrow{C'D}$

$=m\left(-\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}+n\left(-\vec{c}+\vec{a}\right)$

$=\left(n-m\right)\vec{a}+m\vec{b}+\left(1-n\right)\vec{c} \quad (1)$

Do $MN \parallel BD'$ nên $\overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{BD'}, k\in\mathbb{R}\ (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} n-m=k \\ m=k \\ 1-n=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=k \\ n=1-k \\ (1-k)-k=k \end{cases} \Leftrightarrow k=\dfrac{1}{3}$

Khi đó $m=\dfrac{1}{3}, n=\dfrac{2}{3}$

Vậy $\dfrac{MN}{BD'}=\dfrac{1}{3}$

Chọn A.

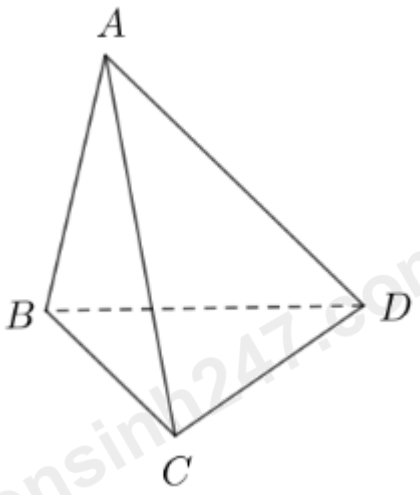
Dạng 3: Góc giữa hai vectơ, tích vô hướng giữa hai vectơ

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\angle BAC = \angle BAD = 60°$. Hãy xác định cặp góc giữa cặp $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$

A. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = 30°$. **B.** $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = 60°$. **C.** $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = 90°$. **D.** $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = 45°$.

Cách giải:

Ta có:



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= AB.AD.\cos\angle BAD - AB.AC.\cos\angle BAC$

$= a^2\cos 60° - a^2\cos 60°$

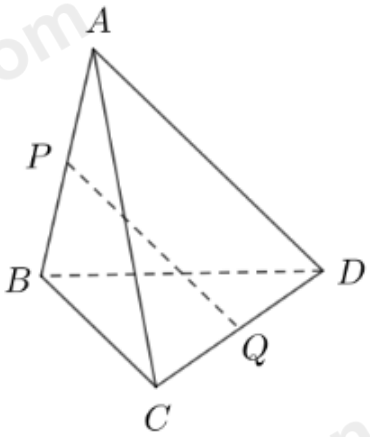
$= 0$

Vậy $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

Chọn C.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{PQ}\right)$

Cách giải:



Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}\right) = 0$

Vậy $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{PQ}$

Câu 3: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai vectơ là $45°$. Xét các mệnh đề đúng sai sau:

a) $\vec{a}.\vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=-5+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2+\sqrt{2}$

d) $\left|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}\right|=0$

Cách giải:

a) Ta có: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=1.1.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Do đó ý a đúng

b) Ta có: $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=|\vec{a}|^2+\vec{a}.\vec{b}-6|\vec{b}|^2=-5+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Do đó ý b đúng

c) Ta có: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^2=2+\sqrt{2}$

Do đó ý c đúng

d) Ta có: $\left|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}\right|=0$

$\Leftrightarrow|\vec{a}|^2-2.\sqrt{2}\vec{a}.\vec{b}+2|\vec{b}|^2=0$

$\Leftrightarrow 3-2=0\ (sai)$

Do đó ý d sai

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a, hãy tính:

a) $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BC}$

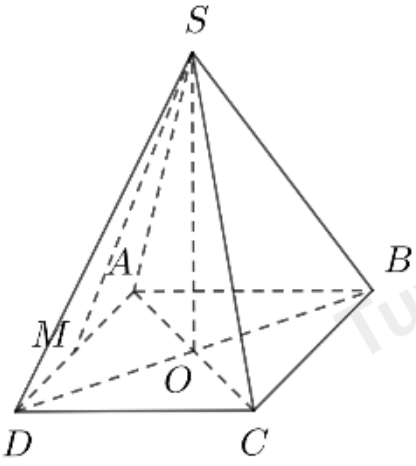
b) $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC}$

c) $\left|\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right|$

Cách giải:

a) Cách 1:

Ta có: $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BC}=AS.BC.\cos\left(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{BC}\right)=a.a.\cos\angle SAD=a^2.\cos 60°=\dfrac{a^2}{2}$



Cách 2:

Gọi M là trung điểm của AD

Khi đó $SM\perp AD$

Ta có: $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}=AM.AD=\dfrac{a^2}{2}$

b) Ta có: $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC}=AO.AC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2}=a^2$

c) Ta có:

$$\left|\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right|^2$$

$$=SA^2+SB^2+SC^2+2\left(\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}\right)$$

$$=3a^2+2\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}+0\right)$$

$$=5a^2$$

Vậy $\left|\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right|=a\sqrt{5}$