# BÀI GIẢNG: KHẢO SÁT VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ PHÂN THỨC BẬC HAI TRÊN BẬC NHẤT
## CHUYÊN ĐỀ: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ
## MÔN: TOÁN 12 (KHÓA LUYỆN THI TN THPTQG KẾT HỢP ĐGNL)
## GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

**MỤC TIÊU**

✓ *Khảo sát và vẽ được đồ thị hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất.*

Hàm số bậc hai trên bậc nhất có dạng: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ $(a,d\neq 0)$, (tử không chia hết cho mẫu)

**Mẫu 1: Hàm số có 2 cực trị**

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số sau: $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

1. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

2. Sự biến thiên

+) Chiều biến thiên: $y'=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$

$$y'=0\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$$

+) Bảng xét dấu:

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $-2$ | ↘ | ↘ | $2$ | ↗ |

Hàm số tăng trên $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$

Hàm số giảm trên $(-2;-1)$ và $(-1;0)$

+) Cực trị:

Phương trình đi qua cực đại, cực tiểu của $y=\dfrac{u}{v}$ là $d: y=\dfrac{u'}{v'}=2x+2$

Hàm số đạt cực đại tại $x=-2; y=-2$, đạt cực tiểu tại $x=0; y=2$.

+) Giới hạn và tiệm cận:

TCĐ: $x=-1$ vì:

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=+\infty$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=-\infty$

TCX: $y=x+1$ vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[(x+1+\dfrac{1}{x+1})-(x+1)]=0$

+) Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ $0$ $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ ↗ | $-2$ | ↘ $-\infty$ | $+\infty$ ↘ $2$ ↗ | $+\infty$ |

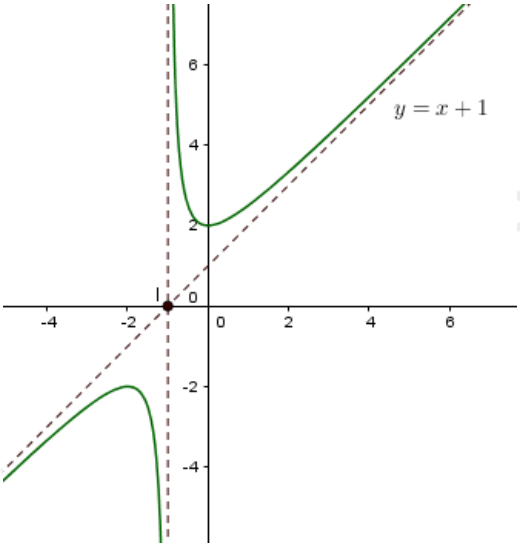
3. Đồ thị

+) Giao với $Oy=M(0,2)$

+) Giao với $Ox\to y=0$ (vô nghiệm)

Suy ra đồ thị không giao $Ox$

+) Đồ thị nhận $I(-1;0)$ (giao điểm của 2 tiệm cận) là tâm đối xứng.




**Bổ sung:**

1) Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại $N$ có $x_0=1$

2) Tìm giao điểm của $(C)$ với $d: y=x-1$

3) Biện luận theo $m$ số nghiệm của phương trình sau: $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}=m$ (*)

**Cách giải:**

1) Gọi $N\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$ là tiếp điểm thuộc $(C)$ và $\Delta$ là tiếp tuyến.

Hệ số góc $k$ của tiếp tuyến: $k=y'(1)=\dfrac{3}{4}$

Phương trình tiếp tuyến: $y = k(x - x_0) + y_0 = \frac{3}{4}(x-1) + \frac{5}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$

2) Phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ và $d$ là:

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1} = x-1$$

$$\Rightarrow x^2+2x+2 = x^2-1$$

$$\Leftrightarrow 2x = -3$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

$$\Rightarrow y = -\frac{5}{2}$$

Vậy $(C)$ và $d$ cắt nhau tại $P\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$,

3) Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của 2 đồ thị $\begin{cases} y = f(x) \ (C) \\ y = m \end{cases}$

TH1: $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$ có 2 nghiệm

TH2: $\left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right.$ có 1 nghiệm

TH3: $-2 < m < 2$ không có nghiệm.

**Mẫu 2: Hàm số không có cực trị**

$$y = \frac{x^2-2x-3}{x-2} = \frac{(x^2-2x)-3}{x-2} = x - \frac{3}{x-2}$$

1. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

2. Sự biến thiên:

+) Chiều biến thiên $y' = 1 + \frac{3}{(x-2)^2} > 0, \forall x \neq 2$

$\Rightarrow$ Hàm số luôn tăng trên từng khoảng xác định $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

$\Rightarrow$Hàm số không có cực trị.

+) Giới hạn và tiệm cận:

TCĐ: $x = 2$

TCX: $y = x$

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

3. Đồ thị

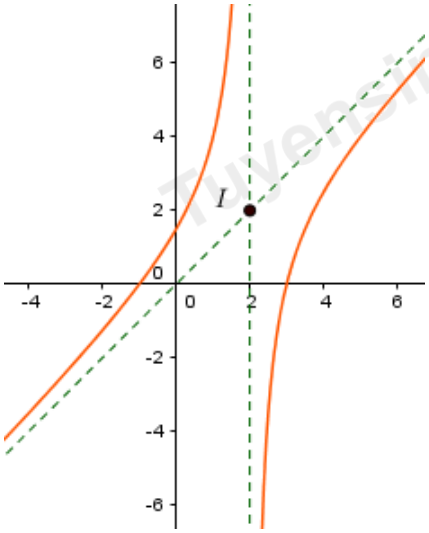
$(C) \cap Oy = A\left(0;\frac{3}{2}\right)$

$(C) \cap Ox \rightarrow$ Cho $y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \rightarrow B(-1,0) \\ x = 3 \rightarrow C(3,0) \end{array}\right.$

Tâm đối xứng $I(2,2)$.




**Tổng kết:** 4 dạng đồ thị hàm số của hàm số bậc hai trên bậc nhất.

