BÀI GIẢNG: ĐINGH NGHĨA NGUYÊN HÀM. BẢNG NGUYÊN HÀM
CHUYÊN ĐỀ: NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN
MÔN: TOÁN 12
GIÁO VIÊN: NGÔ VĂN TOẢN

MỤC TIÊU

- ✓ *Nguyên hàm của một hàm số*
- ✓ *Tính chất cơ bản của nguyên hàm*
- ✓ *Nguyên hàm của một số hàm thường gặp*

I. LÝ THUYẾT

1 Nguyên hàm của một hàm số

Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K

Khi đó:

- Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K

- Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$ với mọi $x\in K$

Do đó, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì $F(x)+C\ (C\in\mathbb{R})$ là họ các nguyên hàm của $f(x)$ trên K

Kí hiệu: $\int f(x)dx=F(x)+C$

Chú ý:

- Để tìm họ các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số $f(x)$ trên K, ta chỉ cần tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên K

Khi đó: $\int f(x)dx=F(x)+C$, C là hằng số

- Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K thì $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.

- Biểu thức $f(x)dx$ gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$, kí hiệu là $dF(x)$

Vậy $dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx$

Ví dụ: $F(x)=x^2+\ln x,\ x>0$

$$dF(x)=\left(x^2+\ln x\right)'dx=\left(2x+\frac{1}{x}\right)dx$$

2 Tính chất cơ bản của nguyên hàm

Nếu $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K thì

a) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ với k là số thực khác 0

b) $\int[f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

c) $\int[f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

3 Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

$\int 0dx = C$	$\int 1dx = x + C$
$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (0 < a \neq 1)$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$

ĐỀ BÀI

Dạng 1: Dùng định nghĩa chứng minh $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$

Câu 4: Trong mỗi trường hợp sau, hàm số $F(x)$ có là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng tương ứng không? Vì sao?

a) $F(x) = x\ln x$ và $f(x) = 1 + \ln x$ trên khoảng $(0;+\infty)$

b) $F(x) = e^{\sin x}$ và $f(x) = e^{\cos x}$ trên $\mathbb{R}$

Câu 5: Cho hàm số $F(x) = (ax^2 + bx + c).e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (-x^2 + 9x - 1).e^{-x}$. Tính $P = a - b + c^2$

Dạng 2: Tìm nguyên hàm đơn giản

Câu 6: Tìm

a) $\int(x^3 + 2x^2 - 3x + 3)dx$

b) $\int(x+2)(2x-1)dx$

c) $\int(2x+1)^3 dx$

Câu 7: Tìm

a) $\int\left(2x+\frac{3}{x}\right)dx$

b) $\int\left(3-\frac{2}{x^2}\right)dx$

c) $\int\frac{x^2+x+1}{x}dx$

Câu 8: Tìm

a) $\int(2\sin x-\cos x)dx$

b) $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$

c) $\int(3.2^x+5e^x)dx$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng 1: Dùng định nghĩa chứng minh $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$

Câu 4: Trong mỗi trường hợp sau, hàm số $F(x)$ có là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng tương ứng không? Vì sao?

a) $F(x)=x\ln x$ và $f(x)=1+\ln x$ trên khoảng $(0;+\infty)$

b) $F(x)=e^{\sin x}$ và $f(x)=e^{\cos x}$ trên $\mathbb{R}$

Cách giải:

a) Ta có: $F'(x)=(x\ln x)'=\ln x+x.\frac{1}{x}=\ln x+1=f(x),\ \forall x>0$

Do đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(0;+\infty)$

b) Ta có: $F'(x)=(\sin x)'.e^{\sin x}=\cos x.e^{\sin x}\neq e^{\cos x},\ \forall x\in\mathbb{R}$

Do đó $F(x)$ không là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$

Câu 5: Cho hàm số $F(x)=(ax^2+bx+c).e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(-x^2+9x-1).e^{-x}$. Tính $P=a-b+c^2$

Cách giải:

Ta có: $F'(x)=(2ax+b).e^{-x}-(ax^2+bx+c).e^{-x}=\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right].e^{-x}$

Do $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$ nên $F'(x)=f(x)$

Khi đó $\begin{cases} -a=-1 \\ 2a-b=9 \\ b-c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-7 \\ c=-6 \end{cases}$

Vậy $P=1-(-7)+(-6)^2=44$

Dạng 2: Tìm nguyên hàm đơn giản

Câu 6: Tìm

a) $\int\left(x^3+2x^2-3x+3\right)dx$

b) $\int(x+2)(2x-1)dx$

c) $\int(2x+1)^3dx$

Cách giải:

a)

$\int\left(x^3+2x^2-3x+3\right)dx$

$=\int x^3dx+\int 2x^2dx-\int 3xdx+\int 3dx$

$=\frac{x^4}{4}+2.\frac{x^3}{3}-3.\frac{x^2}{2}+3x+C$

$=\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x+C$

b)

$\int\left(2x^2+3x-2\right)dx$

$=\int 2x^2dx+\int 3xdx-\int 2dx$

$=2\int x^2dx+3\int xdx-2\int dx$

$=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+C$

c)

$\int(2x+1)^3dx$

$=\int\left(8x^3+12x^2+6x+1\right)dx$

$=\int 8x^3dx+\int 12x^2dx+\int 6xdx+\int 1dx$

$=2x^4+4x^3+3x^2+x+C$

Câu 7: Tìm

a) $\int\left(2x+\frac{3}{x}\right)dx$

b) $\int\left(3-\frac{2}{x^2}\right)dx$

c) $\int \frac{x^2+x+1}{x}dx$

Cách giải:

a) $\int\left(2x+\frac{3}{x}\right)dx=\int 2xdx+\int\frac{3}{x}dx=2\int xdx+3\int\frac{1}{x}dx=x^2+3\ln|x|+C$

b) $\int\left(3-\frac{2}{x^2}\right)dx=3\int dx-2\int\frac{1}{x^2}dx=3x+\frac{2}{x}+C$

c) $\int\frac{x^2+x+1}{x}dx=\int\left(\frac{x^2}{x}+\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx=\int\left(x+1+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^2}{2}+x+\ln|x|+C$

Câu 8: Tìm

a) $\int(2\sin x-\cos x)dx$

b) $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$

c) $\int\left(3.2^x+5e^x\right)dx$

Cách giải:

a) $\int(2\sin x-\cos x)dx=2\int\sin xdx-\int\cos xdx=-2\cos x-\sin x+C$

b) $\int\left(\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx=2\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-3\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=2\tan x-3(-\cot x)+C=2\tan x+3\cot x+C$

c) $\int\left(3.2^x+5e^x\right)dx=3\int 2^x dx+5\int e^x dx=3.\frac{2^x}{\ln 2}+5e^x+C$