BÀI GIẢNG: ĐỊNH LÍ VIÈTE VÀ ỨNG DỤNG
CHUYÊN ĐỀ: HÀM SỐ. HÀM SỐ BẬC HAI MỘT ẨN
MÔN: TOÁN 9 KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

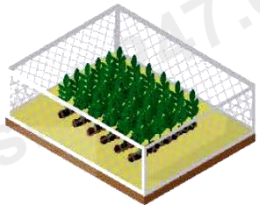
GIÁO VIÊN: ĐỖ VĂN BẢO

MỤC TIÊU

- ✓ *Giải thích định lí Viète.*
- ✓ *Vận dụng định lí Viète để tính nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai, tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng.*

Bài toán mở đầu

Bác An có 40m hàng rào lưới thép. Bác muốn dùng nó để rào xung quanh một mảnh đất trống (đủ rộng) thành một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích $96m^2$ để trồng rau. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn đó.



1 Định lí Viète

Phám phá định lí Viète

Xét phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$. Giả sử $\Delta=b^2-4ac\geq 0$.

HĐ1: Nhắc lại công thức tính hai nghiệm $x_1,\ x_2$ của phương trình trên.

Cách giải:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

HĐ2: Từ kết quả HĐ1, hãy tính x_1+x_2 và x_1x_2.

Cách giải:

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

$$x_1.x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

Nếu $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ thì $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}\\ x_1.x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$.

Ví dụ 1: Không giải phương trình, hãy tính biệt thức Δ (hoặc Δ') để kiểm tra điều kiện có nghiệm, rồi tính tổng và tích các nghiệm của các phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2+11x+7=0$ b) $4x^2-12x+9=0$

Cách giải:

a) Ta có: $\Delta=11^2-4.2.7=65>0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Theo định lí Viète, ta có:

$$x_1+x_2=-\frac{11}{2},\ x_1x_2=\frac{7}{2}$$

b) Ta có: $\Delta'=6^2-4.9=0$ nên phương trình có hai nghiệm trùng nhau x_1, x_2.

Theo định lí Viète, ta có:

$$x_1+x_2=-\frac{12}{4}=-3,\ x_1x_2=\frac{9}{4}$$

Luyện tập 1: Không giải phương trình, hãy tính biệt thức Δ (hoặc Δ') để kiểm tra điều kiện có nghiệm, rồi tính tổng và tích các nghiệm của các phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2-7x+3=0$ b) $25x^2-20x+4=0$ c) $2\sqrt{2}x^2-4=0$

Cách giải:

a) $\Delta=(-7)^2-4.2.3=49-24>0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Theo định lí Viète, ta có: $x_1+x_2=\frac{7}{2},\ x_1x_2=\frac{3}{2}$

b) $\Delta'=(-10)^2-25.4=0$ nên phương trình có nghiệm kép $x_1=x_2$.

Theo định lí Viète, ta có: $x_1+x_2=\frac{20}{25},\ x_1x_2=\frac{4}{25}$

b) $\Delta'=0^2-2\sqrt{2}.(-4)>0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Theo định lí Viète, ta có: $x_1+x_2=0,\ x_1x_2=\frac{-4}{2\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

Tranh luận



Không cần giải, tớ biết ngay tổng và tích hai nghiệm của phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ đều bằng 1.

Ý kiến của em thế nào?

Trả lời: Không đồng ý vì cần phải kiểm tra điều kiện có nghiệm của phương trình. $\Delta=(-1)^2-4.1<0$ nên phương trình vô nghiệm.

2 Áp dụng định lí Viète để tính nhẩm nghiệm

Giải phương trình bậc hai khi biết một nghiệm của nó

HĐ3: Cho phương trình $2x^2-7x+5=0$.

a) Xác định các hệ số a, b, c rồi tính a + b + c.

b) Chứng tỏ rằng $x_1=1$ là một nghiệm của phương trình.

c) Dùng định lí Viète để tìm nghiệm còn lại x_2 của phương trình.

Cách giải:

a) a = 2, b = -7, c = 5 nên a + b + c = 2 + (-7) + 5 = 0.

b) Thay x = 1 vào phương trình ta có: $2.1^2-7.1+5=0$ nên $x_1=1$ là một nghiệm của phương trình.

c) Ta có $x_1x_2=\frac{5}{2}$ nên $x_2=\frac{5}{2}$.

Phương trình có 2 nghiệm $x_1=1,\ x_2=\frac{5}{2}$.

HĐ4: Cho phương trình $3x^2+5x+2=0$.

a) Xác định các hệ số a, b, c rồi tính a – b + c.

b) Chứng tỏ rằng $x_1=-1$ là một nghiệm của phương trình.

c) Dùng định lí Viète để tìm nghiệm còn lại x_2 của phương trình.

Cách giải:

a) a = 3, b = 5, c = 2 nên a – b + c = 3 – 5 + 2 = 0.

b) Thay $x_1=-1$ vào phương trình ta có: $3.(-1)^2+5.(-1)+2=0$ nên $x_1=-1$ là một nghiệm của phương trình.

c) Ta có $x_1x_2=\frac{2}{3}$ nên $x_2=-\frac{2}{3}$.

Phương trình có 2 nghiệm $x_1=-1,\ x_2=-\frac{2}{3}$.

Xét phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$.

- Nếu a + b + c = 0 thì phương trình có một nghiệm là $x_1=1$, còn nghiệm kia là $x_2=\frac{c}{a}$.
- Nếu a – b + c = 0 thì phương trình có một nghiệm là $x_1=-1$, còn nghiệm kia là $x_2=-\frac{c}{a}$.

Ví dụ 2: Bằng cách nhẩm nghiệm, hãy giải các phương trình sau:

a) $x^2-6x+5=0$ b) $5x^2+14x+9=0$

Cách giải:

a) Ta có: $a+b+c=1+(-6)+5=0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1=1,\ x_2=5$.

b) Ta có: $a-b+c=5-14+9=0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1=-1,\ x_2=-\frac{9}{5}$.

Ví dụ 3: Giải phương trình $x^2-7x+12=0$, biết rằng phương trình có một nghiệm là $x_1=3$.

Cách giải:

Gọi x_2 là nghiệm còn lại của phương trình. Theo định lí Viète ta có: $x_1x_2=12$.

Do đó, $x_2=\frac{12}{x_1}=\frac{12}{3}=4$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1=3,\ x_2=4$.

Luyện tập 2: Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $3x^2-11x+8=0$

b) $4x^2+15x+11=0$

c) $x^2+2\sqrt{2}x+2=0$, biết phương trình có một nghiệm là $x=-\sqrt{2}$.

Cách giải:

a) $a+b+c=3+(-11)+8=0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1=1,\ x_2=\frac{8}{3}$.

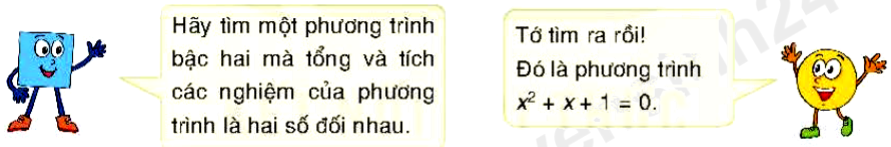
b) $a-b+c=4-15+11=0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1=-1,\ x_2=-\frac{11}{4}$.

c) Gọi x_2 là nghiệm còn lại của phương trình. Theo định lí Viète ta có: $x_1x_2=2$.

Do đó, $x_2=\frac{2}{x_1}=\frac{2}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$.

Vậy phương trình có nghiệm kép $x_1=x_2=-\sqrt{2}$.

Thử thách nhỏ



Em có đồng ý với ý kiến của Tròn không? Vì sao?

Trả lời: Không đồng ý vì phương trình của Tròn có $\Delta=(-1)^2-4.1.1=-3<0$ nên phương trình $x^2+x+1=0$ vô nghiệm.

3 Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

Thiết lập phương trình bậc hai để tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

HĐ5: Giả sử hai số có tổng S = 5 và tích P = 6. Thực hiện các bước sau để thiết lập phương trình bậc hai nhận hai số đó làm nghiệm.

a) Gọi một số là x. Tính số kia theo x.

b) Sử dụng kết quả câu a và giả thiết, hãy lập phương trình để tìm x.

Cách giải:

a) S = 5 nên số còn lại là 5 – x.

b) P = 6 nên ta có x(5 – x) = 6

$-x^2+5x+6=0$

$x^2-5x+6=0$

$\boxed{x^2-Sx+P=0}$

Điều kiện có nghiệm:

$\Delta=(-S)^2-4P\geq 0$

$S^2-4P\geq 0$

$S^2\geq 4P$

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$x^2-Sx+P=0$$

Điều kiện để có hai số đó là $S^2-4P\geq 0$.

Ví dụ 4: Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 9, tích của chúng bằng 20.

Cách giải:

Hai số cần tìm là nghiệm của phương trình $x^2-9x+20=0$.

Ta có $\Delta=(-9)^2-4.1.20=1,\ \sqrt{\Delta}=1$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm: $x_1=\frac{9-1}{2}=4,\ x_2=\frac{9+1}{2}=5$.

Vậy hai số cần tìm là 4 và 5.

Luyện tập 3: Tìm hai số biết tổng của chúng bằng -11, tích của chúng bằng 28.

Cách giải:

Hai số cần tìm là nghiệm của phương trình $x^2+11x+28=0$.

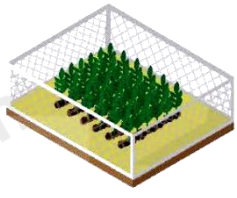
Ta có $\Delta=(-11)^2-4.1.28=9,\ \sqrt{\Delta}=3$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm: $x_1=\frac{-11-3}{2}=-7,\ x_2=\frac{-11+3}{2}=-4$.

Vậy hai số cần tìm là -7 và -4.

Quay lại Bài toán mở đầu

Bác An có 40m hàng rào lưới thép. Bác muốn dùng nó để rào xung quanh một mảnh đất trống (đủ rộng) thành một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích $96m^2$ để trồng rau. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn đó.



Cách giải:

$x_1 + x_2 = 20,\ x_1 x_2 = 96$

x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 20x + 96 = 0$

$x_1 = 12,\ x_2 = 8$

Vậy chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn là 12m và 8m.

4 Bài tập áp dụng

6.23. Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích các nghiệm (nếu có) của các phương trình sau:

a) $x^2 - 12x + 8 = 0$ b) $2x^2 + 11x - 5 = 0$

c) $3x^2 - 10 = 0$ d) $x^2 - x + 3 = 0$

6.24. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $2x^2 - 9x + 7 = 0$ b) $3x^2 + 11x + 8 = 0$

c) $7x^2 - 15x + 2 = 0$, biết phương trình có một nghiệm $x_1 = 2$.

6.25. Tìm hai số u và v, biết:

a) $u + v = 20,\ uv = 99$ b) $u + v = 2,\ uv = 15$

6.26. Chứng tỏ rằng nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thì đa thức $ax^2 + bx + c = 0$ phân tích được thành nhân tử như sau:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Áp dụng: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 + 11x + 18$ b) $3x^2 + 5x - 2$

6.27. Một bể bơi hình chữ nhật có diện tích $500m^2$ và chu vi là 150m. Tính các kích thước của bể bơi này.

BTBS1. Phương trình $x^2 + (2m + 1)x + 3m = 0$ (với m là tham số) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm $x_1 = 3$, tìm nghiệm còn lại x_2.

BTBS2. Cho phương trình bậc hai $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0\ (m \neq 1)$ (m là tham số). Tìm các giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm nguyên.

HƯỚNG DẪN GIẢI

6.23. Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích các nghiệm (nếu có) của các phương trình sau:

a) $x^2-12x+8=0$ b) $2x^2+11x-5=0$

c) $3x^2-10=0$ d) $x^2-x+3=0$

Cách giải:

a) $\Delta'=(-6)^2-8=28>0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$x_1+x_2=12,\ x_1x_2=8$

b) $\Delta=11^2-4.2.(-5)=161>0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$x_1+x_2=\frac{-11}{2},\ x_1x_2=\frac{-5}{2}$

c) $\Delta'=0^2-3.(-10)=30>0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$x_1+x_2=0,\ x_1x_2=\frac{-10}{3}$

d) $\Delta=(-1)^2-4.1.3=-11<0$ nên phương trình vô nghiệm.

6.24. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $2x^2-9x+7=0$ b) $3x^2+11x+8=0$

c) $7x^2-15x+2=0$, biết phương trình có một nghiệm $x_1=2$.

Cách giải:

a) $a+b+c=2+(-9)+7=0$ nên phương trình có 2 nghiệm $x_1=1,\ x_2=\frac{7}{2}$.

b) $a-b+c=3-11+8=0$ nên phương trình có 2 nghiệm $x_1=-1,\ x_2=-\frac{8}{3}$.

c) Gọi x_2 là nghiệm còn lại của phương trình. Theo định lí Viète ta có: $x_1x_2=\frac{2}{7}$.

Do đó, $x_2=\frac{2}{7}:x_1=\frac{2}{7}:2=\frac{1}{7}$.

Vậy phương trình có nghiệm kép $x_1=2,\ x_2=\frac{1}{7}$.

6.25. Tìm hai số u và v, biết:

a) $u+v=20,\ uv=99$ b) $u+v=2,\ uv=15$

Cách giải:

a) u, v là 2 nghiệm của phương trình $x^2-20x+99=0$.

$x_1=9,\ x_2=11$

Vậy u = 9, v = 11.

b) u, v là 2 nghiệm của phương trình $x^2-2x+15=0$. Phương trình vô nghiệm.

Vậy không có u, v thoả mãn điều kiện.

6.26. Chứng tỏ rằng nếu phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thì đa thức $ax^2+bx+c=0$ phân tích được thành nhân tử như sau:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Áp dụng: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2+11x+18$ b) $3x^2+5x-2$

Cách giải:

$$\begin{aligned}a(x-x_1)(x-x_2)&=a\left(x^2-x_2x-x_1x+x_1x_2\right)\\&=a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right]\\&=a\left(x^2-\frac{-b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\&=ax^2+bx+c\end{aligned}$$

a) $x^2+11x+18=0$

$x_1=2,\ x_2=-9$

nên $x^2+11x+18=(x-2)(x+9)$

b) $3x^2+5x-2=0$

$x_1=-2,\ x_2=\frac{1}{3}$

nên $3x^2+5x-2=3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$

6.27. Một bể bơi hình chữ nhật có diện tích $500m^2$ và chu vi là 150m. Tính các kích thước của bể bơi này.

Cách giải:

$u+v=\frac{150}{2}=75,\ uv=500$ (u, v là kích thước của bể)

u, v là 2 nghiệm của phương trình $x^2-75x+500=0$

$u=\frac{75-5\sqrt{145}}{2}\approx 7,4\ (m),\ v=\frac{75+5\sqrt{145}}{2}\approx 67,6\ (m)$

BTBS1. Phương trình $x^2+(2m+1)x+3m=0$ (với m là tham số) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm $x_1=3$, tìm nghiệm còn lại x_2.

Cách giải:

Theo định lí Viète, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(2m+1) \\ x_1 x_2 = 3m \end{cases}$

$\begin{cases} 3 + x_2 = -(2m+1) \\ 3x_2 = 3m \end{cases}$

Thay $x_2 = m$ vào phương trình trên:

$3 + x_2 = -2x_2 + 1$

$3x_2 = -4$

$x_2 = -\dfrac{4}{3}$

BTBS2. Cho phương trình bậc hai $(m-1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0 \ (m \neq 1)$ (m là tham số). Tìm các giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm nguyên.

Cách giải:

Xét $\Delta' = m^2 - (m-1)(m+1)$

$\Delta' = m^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0 \ \forall m$

nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt thoả mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{m-1} = S \\ x_1 x_2 = \dfrac{m+1}{m-1} = P \end{cases}$

Để $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ thì $\dfrac{-2m}{m-1} \in \mathbb{Z}$ và $\dfrac{m+1}{m-1} \in \mathbb{Z}$

$P = \dfrac{m+1}{m-1} = \dfrac{m-1+2}{m-1} = 1 + \dfrac{2}{m-1}$

Để $m \in \mathbb{Z}$, $P \in \mathbb{Z}$ thì $m - 1 \in U(2) = \{1; 2; -1; -2\}$

m – 1	1	2	-1	-2
m	2	3	0	-1
P	3	2	-1	0
S	4	3	0	1

Vậy $m \in \{2; 3; 0; -1\}$.