BÀI GIẢNG: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG
CHUYÊN ĐỀ: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN
MÔN: TOÁN 12
GIÁO VIÊN: NGUYỄN HOÀNG TÙNG

MỤC TIÊU

✓ *Ôn tập các dạng toán về phương trình mặt phẳng.*

ĐỀ BÀI

Dạng 1: Viết phương trình mặt phẳng biết một điểm thuộc mặt phẳng và tìm được một vectơ pháp tuyến

Ví dụ 1: Biết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{v}(-1;2;1)$

Ví dụ 2: Cho ba điểm $A(2;1;-1), B(-1;0;4), C(0;-2;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;2), B(3;5;-2)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (Oxy) và đi qua điểm $A(1;1;1)$

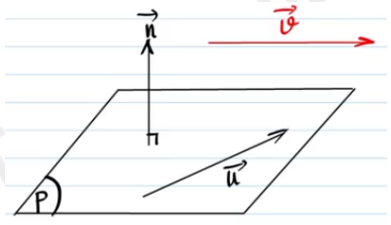
Ví dụ 5: Cho mặt phẳng $(Q): x-y+2z-2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q), đồng thời cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm M, N sao cho $MN=2\sqrt{2}$.

Dạng 2: Viết phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và có cặp vectơ chỉ phương

$$\begin{cases}\vec{n}\perp\vec{u}\\ \vec{n}\perp\vec{v}\end{cases}\Rightarrow \vec{n}=[\vec{u};\vec{v}]$$

$$[\vec{u};\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}b & c\\ b_1 & c_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}c & a\\ c_1 & a_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}\right)$$

$$=\left(c_1b-b_1c;a_1c-c_1a;b_1a-a_1b\right)$$



Ví dụ 1: Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0;2;-2)$ và nhận vectơ $\vec{a}(2,0,1), \vec{b}(-1,1,0)$ là hai vectơ chỉ phương.

Ví dụ 2: Cho hai điểm $A(1;-1;5), B(0;0;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa A, B và song song với trục Oy

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1); B(2;1;0)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-3z+1=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa $A; B$ và vuông góc với (P). Viết phương trình mặt phẳng (Q)

Ví dụ 4: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với hai mặt phẳng $(P): x-y+z-7=0, (Q): 3x+2y-12z+5=0$

Ví dụ 5: Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;1;0)$.

Ví dụ 6: Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng $ax+by+cz+5=0$ qua hai điểm $A(3;1;-1), B(2;-1;4)$ và vuông góc với $(P): 2x-y+3z+4=0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng 1: Viết phương trình mặt phẳng biết một điểm thuộc mặt phẳng và tìm được một vectơ pháp tuyến

Ví dụ 1: Biết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{v}(-1;2;1)$

Cách giải:

Phương trình mặt phẳng :

$(P): -1(x-1)+2(y-2)+1\cdot(z-3)=0.$

$\Leftrightarrow -x+2y+z+(1-4-3)=0$

$(P): -x+2y+z-6=0$

Ví dụ 2: Cho ba điểm $A(2;1;-1), B(-1;0;4), C(0;-2;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC

Cách giải:

$\vec{n}_p = \overrightarrow{BC}(1;-2;-5)$

phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là: $(P): x-2y-5z-5=0$

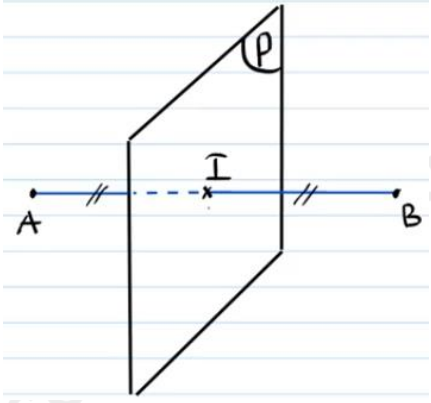
Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;2), B(3;5;-2)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

Cách giải:

I là trung điểm của AB $\Rightarrow I = \dfrac{A+B}{2} = (2;1;0)$

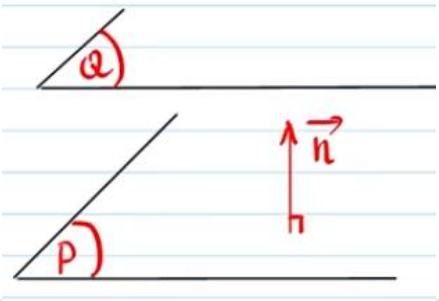
$\vec{n}_p = \overrightarrow{AI}(1;4;-2)$

$(P): x+4y-2z-6=0$



Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (Oxy) và đi qua điểm $A(1;1;1)$

Cách giải:



Do $(P)//(Oxy)$ thì $\vec{n}_p = \vec{n}_{0xy} = \vec{k}(0;0;1)$

$\Rightarrow (P): z-1=0$

Nhanh: Ta có $(Oxy): z=0 \Rightarrow (P): z=1$ (Do qua A có $z_A = 1$)

Ví dụ 5: Cho mặt phẳng $(Q): x-y+2z-2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q), đồng thời cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm M, N sao cho $MN = 2\sqrt{2}$.

Cách giải:

+) $(P)//(Q): x-y+2z-2=0$

$\Rightarrow (P): x-y+2z+d=0 \ (d \neq -2)$

+) $(P) \cap Ox = \{M\} \Rightarrow M(m;0;0) \in (P)$

$\Rightarrow m+d=0 \Leftrightarrow m=-d \Leftrightarrow M(-d;0;0)$

+) $(P) \cap Oy = \{N\} \Rightarrow N(0;n;0) \in (P)$

$\Rightarrow -n+d=0 \Leftrightarrow n=d \Leftrightarrow N(0;d;0)$

+) $MN = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{d^2+d^2} = 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow d^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=2 \ (\text{tm}) \\ d=-2 \ (\text{loai}) \end{array}\right.$

Vậy (P): $x-y+2z+2=0$

Dạng 2: Viết phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và có cặp vectơ chỉ phương

Ví dụ 1: Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0;2;-2)$ và nhận vectơ $\vec{a}(2,0,1), \vec{b}(-1,1,0)$ là hai vectơ chỉ phương.

Cách giải:

Ta có $\vec{a}(2,0,1), \vec{b}(-1,1,0)$

$\Rightarrow \vec{n} = [\vec{a};\vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-1;-1;2)$

$\Rightarrow (P)$: $-x-y+2z+6=0$

Ví dụ 2: Cho hai điểm $A(1;-1;5), B(0;0;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa A, B và song song với trục Oy

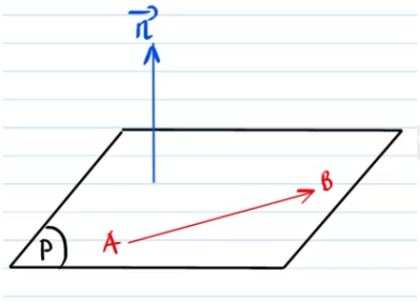
Cách giải:

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}(-1;1;-4)$

$\vec{n} \perp \vec{j}(0;1;0)$

$\Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{j}] = (4;0;-1)$

$\Rightarrow (P): 4x - z + 1 = 0$



Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1); B(2;1;0)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 3z + 1 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa $A; B$ và vuông góc với (P). Viết phương trình mặt phẳng (Q)

Cách giải:

$\vec{n}_Q \perp \overrightarrow{AB}(1;-1;1)$

$\vec{n}_Q \perp \vec{n}_P(2;1;-3)$

$\Rightarrow \vec{n}_Q = \left[\overrightarrow{AB}; \vec{n}_Q\right] = (2;5;3)$

$\Rightarrow (Q): \ 2x + 5y + 3z - 9 = 0$

Ví dụ 4: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với hai mặt phẳng $(P): x - y + z - 7 = 0, (Q): 3x + 2y - 12z + 5 = 0$

Cách giải:

$(\alpha) \perp (P) \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_p(1;-1;1)$

$(\alpha) \perp (Q) \rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_Q(3;2;-12)$

$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = (10;15;5) = \frac{1}{5}(10;15;5) = (2;3;1)$

$\Rightarrow (\alpha): 2x + 3y + z = 0.$

Ví dụ 5: Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;1;0)$.

Cách giải:

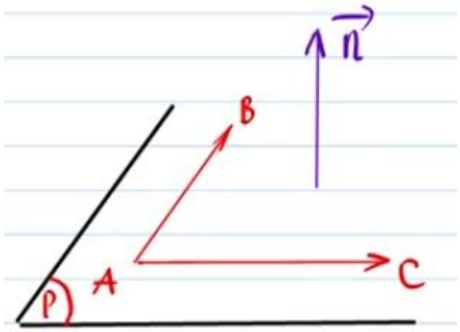
Cách 1:

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}(2;-3;-1)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}(-2;0;-2)$

$\Rightarrow \vec{n} = (6;6;-6) = (1;1;-1)$

$\Rightarrow (P): x + y - z + 1 = 0$



Cách 2:

Gọi $(P): \ ax + by + cz + 1 = 0$

phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;1;0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 0a+1b+2c=-1 \\ 2a-2b+c=-1 \\ -2a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow (P): x+y-z+1=0$

Ví dụ 6: Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng $ax+by+cz+5=0$ qua hai điểm $A(3;1;-1), B(2;-1;4)$ và vuông góc với $(P): 2x-y+3z+4=0$.

Cách giải:

$\overrightarrow{AB}(-1;-2;5)$

$\vec{n}_p(2;-1;3)$

$\Rightarrow \vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{n_p}\right]=(-1;13;5)$

$(Q):\ -x+13y+5z-5=0$