BÀI GIẢNG: XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN TIẾT 1
CHUYÊN ĐỀ: XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN
MÔN: TOÁN 12 (KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG)
GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

MỤC TIÊU

- ✓ *Nhận biết khái niệm và công thức xác suất có điều kiện.*
- ✓ *Nhận biết mối liên hệ giữa xác suất và xác suất có điều kiện.*

I. ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Trong thực tế, ta thường cập nhật xác suất của một biến cố khi biết thêm một thông tin nào đó. Chẳng hạn:

- Tính xác suất để ngày mai mưa nếu hôm nay không mưa;
- Tính xác suất để bạn An là học sinh giỏi môn Toán nếu biết rằng An là một học sinh giỏi môn Tin;
- Tinh xác suất để một người thọ 80 tuổi nếu người đó đã sống đến 60 tuổi. (Các công ty bảo hiểm rất quan tầm đến xác suất này).

HĐ1. Hình thành định nghĩa xác suất có điều kiện

Trong một hộp kín có 7 chiếc bút bi xanh và 5 chiếc bút bi đen, các chiếc bút có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một chiếc bút bi trong hộp, không trả lại. Sau đó Tùng lấy ngẫu nhiên một trong 11 chiếc bút còn lại. Tính xác suất để Tùng lấy được bút bi xanh nếu biết rằng Sơn đã lấy được bút bi đen.

Cách giải:

Gọi A là biến cố: "Tùng lấy được bút bi xanh", B là biến cố: "Sơn lấy được bút bi đen".

Sơn có 12 cách chọn, Tùng có 11 cách chọn một chiếc bút bi trong hộp.

Do đó, $n(\Omega)=12.11=132$

Sơn có 5 cách chọn bút bi đen, Tùng có 11 cách chọn bút bi từ 11 bút bi còn lại.

Do đó, $n(B)=5.11=55$ và $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{55}{132}$.

Sơn có 5 cách chọn bút bi đen, Tùng có 7 cách chọn bút bi xanh từ 11 bút bi còn lại.

Do đó, $n(AB)=5.7=35$ và $P(AB)=\dfrac{n(AB)}{n(\Omega)}$

Vậy xác suất để Tùng lấy được bút bi xanh nếu Sơn lấy được bút bi đen là:

$$P=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{35}{55}=\frac{7}{11}$$

Định nghĩa xác suất có điều kiện

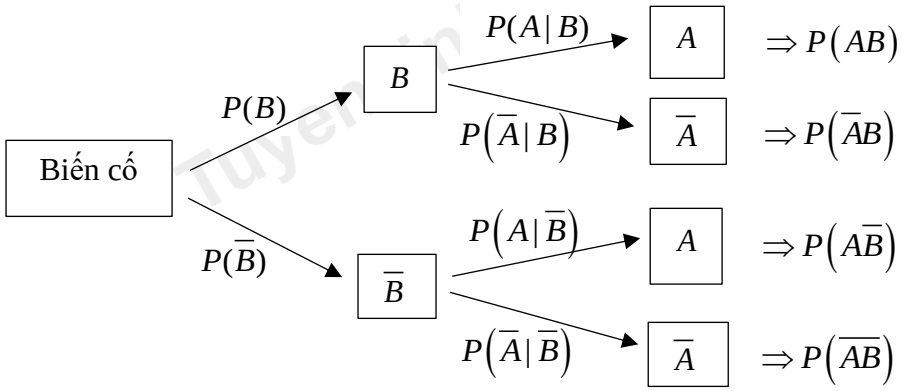
Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A, tính trong điều kiện biết rằng biến cố B đã xảy ra, được gọi là xác suất của A với điều kiện B và kí hiệu là $P(A|\ B)$.

Công thức xác suất có điều kiện:

Cho hai biến cố A và B bất kì, với $P(B)>0$. Khi đó

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Sơ đồ cây:



Ví dụ 1: Một hộp có 20 viên bi trắng và 10 viên bi đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Bình lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn An lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp đó.

Gọi A là biến cố: "An lấy được viên bi trắng"; B là biến cố: "Bình lấy được viên bi trắng".

Tính $P(A|\ B)$ bằng định nghĩa và bằng công thức tính $P(A|\ B)$ ở trên.

Cách giải:

a) Cách 1: Bằng định nghĩa

Nếu B xảy ra tức là Bình lấy được viên bi trắng. Khi đó, trong hộp còn lại 29 viên bi với 19 viên bi trắng và 10 viên bi đen.

Vậy $P(A|\ B)=\frac{19}{29}$.

b) Cách 2: Bằng công thúc

Bình có 30 cách chọn, An có 29 cách chọn một viên bi trong hộp.

Do đó $n(\Omega)=30\cdot 29$.

Bình có 20 cách chọn một viên bi trắng, An có 29 cách chọn từ 29 viên bi còn lại.

Do đó $n(B)=20.29$ và $P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}$.

Bình có 20 cách chọn một viên bi trắng, An có 19 cách chọn một viên bi trắng trong 19 viên bi trắng còn lại.

Do đó $n(AB)=20.19$ và $P(AB)=\frac{n(AB)}{n(\Omega)}$.

Vậy $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{20\cdot 19}{20\cdot 29}=\frac{19}{29}$.

Luyện tập 1. Trở lại Ví dụ 1. Tính $P(A|\overline{B})$ bằng định nghĩa và bằng công thức.

a) Cách 1: Bằng định nghĩa

Nếu B không xảy ra tức là Bình lấy được viên bi đen. Khi đó, trong hộp còn lại 29 viên bi với 20 viên bi trắng và 9 viên bi đen.

Vậy $P(A|\overline{B})=\frac{20}{29}$.

b) Cách 2: Bằng công thúc

Bình có 30 cách chọn, An có 29 cách chọn một viên bi trong hộp.

Do đó $n(\Omega)=30\cdot 29$.

Bình có 10 cách chọn một viên bi đen, An có 29 cách chọn từ 29 viên bi còn lại.

Do đó $n(B)=10.29$ và $P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}$.

Bình có 10 cách chọn một viên bi đen, An có 20 cách chọn một viên bi trắng trong 20 viên bi trắng còn lại.

Do đó $n(AB)=10.20$ và $P(AB)=\frac{n(AB)}{n(\Omega)}$.

Vậy $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{10\cdot 20}{10\cdot 29}=\frac{20}{29}$.

Ví dụ 2:

a) Từ công thức tinh $P(A|B)$ ở trên, chứng minh rằng nếu A và B là hai biến cố độc lập với $P(A)>0, P(B)>0$ thì $P(A|B)=P(A)$ và $P(B|A)=P(B)$.

b) Từ định nghĩa xác suất có điều kiện và định nghĩa về tính độc lập của hai biến cố, hãy chứng tỏ rằng nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $P(A|B)=P(A)$ và $P(B|A)=P(B)$.

Cách giải:

a) Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Vậy với $P(A)>0, P(B)>0$ ta có:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)}=P(A)$$

$$P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{P(B)\cdot P(A)}{P(A)}=P(B)$$

b) Theo định nghĩa, $P(A|B)$ là xác suất của A, tính trong điều kiện biết rằng biến cố B đã xảy ra.

Vì A, B độc lập nên việc xảy ra B không ảnh hưởng tới xác suất xuất hiện của A.

Do đó: $P(A|B)=P(A)$

Tương tự $P(B|A)$ là xác suất của B, tính trong điều kiện biết rằng biến cố A đã xảy ra.

Vì A, B độc lập nên việc xảy ra A không ảnh hưởng tới xác suất xuất hiện của B.

Do đó: $P(B|\ A) = P(B)$.

Luyện tập 2: Chứng tỏ rằng nếu A và B là hai biến cố độc lập thì

$$P(\bar{A}|\ B) = P(\bar{A}) \text{ và } P(A|\ \bar{B}) = P(A).$$

Cách giải:

Theo định nghĩa, $P(\bar{A}|\ B)$ là xác suất của $\bar{A}$, tính trong điều kiện biết rằng nếu biến cố B đã xảy ra.

Vì A và B độc lập nên $\bar{A}$ và B cũng độc lập. Do đó, việc xảy ra B không ảnh hưởng tới xác suất xuất hiện của $\bar{A}$. Do đó, $P(\bar{A}|\ B) = P(\bar{A})$.

Theo định nghĩa, $P(A|\ \bar{B}) = P(A)$ là xác suất của A , tính trong điều kiện biết rằng nếu biến cố $\bar{B}$ đã xảy ra.

Vì A và B độc lập nên A và $\bar{B}$ cũng độc lập. Do đó, việc xảy ra $\bar{B}$ không ảnh hưởng tới xác suất xuất hiện của A . Do đó, $P(A|\ \bar{B}) = P(A)$.

Ví dụ 3: (Bảng dữ liệu thống kê 2×2) Một viện nghiên cứu về an toàn giao thông muốn tìm hiểu về mối quan hệ giữa việc thắt dây an toàn khi lái xe và nguy cơ tử vong của người lái xe khi xảy ra tai nạn giao thông. Giả sử viện đã xem xét 577006 vụ tai nạn giao thông ô tô và việc thắt dây an toàn của người lái xe khi xảy ra tai nạn giao thông. Kết quả cho thấy:

- Trong số những người lái xe có thắt dây an toàn, có 510 người tử vong và 412368 người sống sót;
- Trong số những người lái xe không thắt dây an toàn, có 1601 người tử vong và 162527 người sống sót.

Kết quả trên được trình bày dưới dạng bảng gồm 2 dòng và 2 cột như dưới đây, được gọi là bảng dữ liệu thống kê 2×2:

Thắt dây an toàn \ Kết quả	Tử vong	Sống sót
Không	1 601	162 527
Có	510	412 368

Chọn ngẫu nhiên một người lái xe trong số 577006 người bị tai nạn giao thông.

a) Tính xác suất để người lái xe đó tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông trong trường hợp không thắt dây an toàn.

b) Tính xác suất để người lái xe đó tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông trong trường hợp có thắt dây an toàn.

c) So sánh hai xác suất ở câu a và câu b rồi rút ra kết luận.

Cách giải:

a) Không gian mẫu Ω là tập hợp gồm 577006 người lái xe xảy ra tai nạn giao thông

$\Rightarrow n(\Omega) = 577006$

Gọi A là biến cố: "Người lái xe đó tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông";

B là biến cố: "Người lái xe đó không thắt dây an toàn khi xảy ra tai nạn giao thông".

Khi đó AB là biến cố: "Người lái xe đó tử vong và không thắt dây an toàn khi xảy ra tai nạn giao thông".

Ta cần tính $P(A|\ B)$.

Ta có $162527+1601=164128$ người không thắt dây an toàn $\Rightarrow n(B)=164128$.

Vậy $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{164128}{577006}$.

Trong số những người không thắt dây an toàn, có 1601 người tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông $\Rightarrow n(AB)=1601$. Vậy $P(AB)=\dfrac{n(AB)}{n(\Omega)}=\dfrac{1601}{577006}$.

Do đó $P(A|\ B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{1601}{164128}\approx 9,755\cdot 10^{-3}=0,009755$.

b) Ta cần tính $P(A|\ \overline{B})$.

$\overline{B}$ là biến cố: "Người lái xe đó có thắt dây an toàn khi xảy ra tai nạn giao thông".

$A\overline{B}$ là biến cố: "Người lái xe đó tử vong và có thắt dây an toàn khi xảy ra tai nạn giao thông".

Ta có $412368+510=412878$ người lái xe có thắt dây an toàn $\Rightarrow n(\overline{B})=412878$.

Trong số những người có thắt dây an toàn, có 510 người tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông $\Rightarrow n(A\overline{B})=510$

Tương tự như trên, ta có: $P(A|\ \overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{n(A\overline{B})}{n(\overline{B})}=\dfrac{510}{412878}\approx 1,235\cdot 10^{-3}=0,001235$

c) Ta có: $\dfrac{P(A|\ B)}{P(A|\ \overline{B})}\approx\dfrac{9,755\cdot 10^{-3}}{1,235\cdot 10^{-3}}\approx 7,9\Rightarrow P(A|\ B)\approx 7,9\cdot P(A|\ \overline{B})$

Như vậy, xác suất để một người lái xe không thắt dây an toàn bị tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông cao gấp khoảng 7,9 lần xác suất để một người lái xe thắt dây an toàn bị tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông.

Tức là không thắt dây an toàn làm tăng nguy cơ bị tử vong khi xảy ra tai nạn giao thông của người lái xe lên gấp khoảng 7,9 lần.