BÀI GIẢNG: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG TIẾT 1
CHUYÊN ĐỀ: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN
MÔN: TOÁN 12 (KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG)
GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

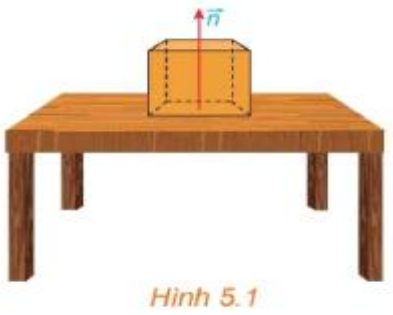
MỤC TIÊU

- ✓ *Biết cách xác định vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.*
- ✓ *Xác định tích có hướng của hai vectơ.*
- ✓ *Viết phương trình mặt phẳng.*

I. Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

HĐ1. Hình thành khái niệm vectơ pháp tuyến

Trên mặt bàn phẳng, đặt một vật. Khi đó, mặt bàn tác động lên vật phản lực pháp tuyến $\vec{n}$, giá của vectơ $\vec{n}$ vuông góc với mặt bàn. Nếu mặt bàn thuộc mặt phẳng nằm ngang thì $\vec{n}$ có phương gì? (H.5.1)



Hình 5.1

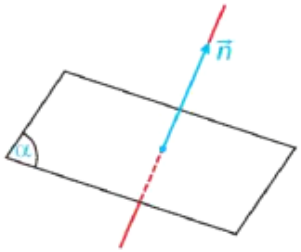
Cách giải:

Nếu mặt bàn thuộc mặt phẳng nằm ngang thì $\vec{n}$ có phương thẳng đứng, vuông góc với mặt bàn.

Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α).

Chú ý:

- Mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó.
- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ (với k là một số khác 0) cũng là một vectơ pháp tuyến của (α).



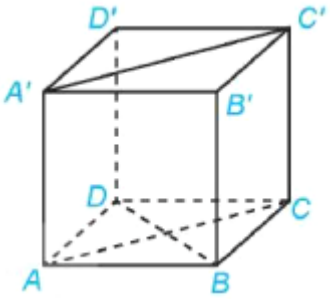
Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (*H*.5.3).

Trong các khẳng định sau, những khẳng định nào là đúng?

a) $\overrightarrow{AA'}$ và $2\overrightarrow{BB'}$ đều là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$.

b) $\overrightarrow{BD}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ACC'A')$.

c) $\overrightarrow{A'C'}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$.



Cách giải:

Vì các đường thẳng AA', BB' vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $\overrightarrow{AA'}, 2\overrightarrow{BB'}$ đều là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$.

Đường thẳng BD vuông góc với hai đường thẳng AC và AA' nên vuông góc với mặt phẳng $(ACC'A)$.

Vậy $\overrightarrow{BD}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\left(ACC'A\right)$.

Đường thẳng $A'C'$ không vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên vectơ $\overrightarrow{A'C'}$ không phải là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.

Vậy các khẳng định a và b là đúng, khẳng định c là sai.

Luyện tập 1. Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(1;-2;3), B(-3;0;1)$. Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (α).

Cách giải:

Vì (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB nên giá của $\overrightarrow{AB} \perp (\alpha)$.

Do đó, một vectơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{AB}(-4;2;-2)$.

HĐ2. Tìm một vectơ vuông góc với hai vectơ cho trước

Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{u}=(a;b;c)$ và $\vec{v}=\left(a';b';c'\right)$.

a) Vectơ $\vec{n}=\left(bc'-b'c;ca'-c'a;ab'-a'b\right)$ có vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ hay không?

b) $\vec{n}=\vec{0}$ khi và chỉ khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có mối quan hệ gì?

Cách giải:

a) Ta có: $\vec{n}\cdot\vec{u}=a\left(bc'-b'c\right)+b\left(ca'-c'a\right)+c\left(ab'-a'b\right)$

$=abc'-ab'c+cba'-abc'+ab'c-a'bc$

$=\left(abc'-abc'\right)-\left(ab'c-ab'c\right)+\left(cba'-cba'\right)=0$

Do đó, vectơ $\vec{n}$ vuông góc với vectơ $\vec{u}$.

Ta có: $\vec{n}\cdot\vec{v}=a'\left(bc'-b'c\right)+b'\left(ca'-c'a\right)+c'\left(ab'-a'b\right)$

$=a'bc'-a'b'c+cb'a'-ab'c'+ab'c'-a'bc'$

$=\left(a'bc'-a'bc'\right)-\left(a'b'c-a'b'c\right)+\left(ab'c'-ab'c'\right)=0$

Do đó, vectơ $\vec{n}$ vuông góc với vectơ $\vec{v}$.

Suy ra, vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

b) Nếu $\vec{n}=\vec{0}$ thì $\begin{cases} bc'-b'c=0 \\ ca'-c'a=0 \\ ab'-a'b=0 \end{cases} (I)$

+ Với $a=0,b=0,c=0$ thì (I) luôn đúng. Khi đó, $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

+ Với $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, từ (I) ta có: $\begin{cases} \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \\ \frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} \\ \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} \end{cases}$,

Do đó $a' = ka, b' = kb, c' = kc \quad (k \in \mathbb{R})$

Suy ra: $\vec{v} = k\vec{u}$. Khi đó, $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

Vậy $\vec{n} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{u} = (a;b;c)$ và $\vec{v} = (a';b';c')$. Khi đó vectơ $\vec{n} = (bc' - b'c; ca' - c'a; ab' - a'b)$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, được gọi là **tích có hướng** của $\vec{u}$ và $\vec{v}$ kí hiệu là $[\vec{u}, \vec{v}]$.

Chú ý:

- $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$ khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.
- -Với bốn số x, y, x', y', ta kí hiệu $\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$.

  Khi đó tích có hướng của $\vec{u} = (a;b;c)$ và $\vec{v} = (a';b';c')$ là

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right)$$

Ví dụ 2. Trong không gian O x y z, cho $\vec{u} = (1;-2;0)$ và $\vec{v} = (3;1;-4)$. Tính $[\vec{u}, \vec{v}]$.

Cách giải:

Ta có $[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (8;4;7)$.

Luyện tập 2. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{u} = (2;3;1)$ và $\vec{v} = (4;6;2)$. Tính $[\vec{u}, \vec{v}]$.

Cách giải:

Ta có $[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \right) = (0;0;0)$.

HĐ3. Hình thành khái niệm cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương và có giá nằm trong hoặc song song với mặt phẳng (P).

a) Vectơ $[\vec{u}, \vec{v}]$ có khác vectơ-không và giá của nó có vuông góc với cả hai giá của $\vec{u}, \vec{v}$ hay không?

b) Mặt phẳng (P) có nhận $[\vec{u}, \vec{v}]$ làm một vectơ pháp tuyến hay không?

Cách giải:

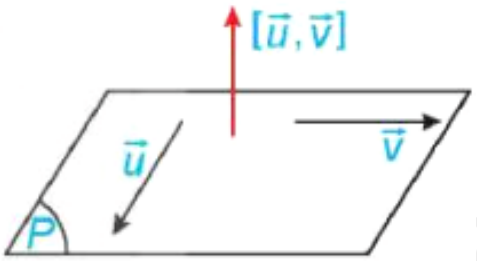
a) Vectơ $[\vec{u},\vec{v}]$ có khác vectơ-không và giá của $[\vec{u},\vec{v}]$ vuông góc với cả hai giá của $\vec{u},\vec{v}$ nếu hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ không cùng phương.

b) Vì hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ không cùng phương và có giá nằm trong hoặc song song với mặt phẳng (P), mà vectơ $[\vec{u},\vec{v}]$ có giá vuông góc với cả hai giá của $\vec{u},\vec{v}$ nên giá của vectơ $[\vec{u},\vec{v}]$ vuông góc với mặt phẳng (P).

Suy ra, mặt phẳng (P) nhận $[\vec{u},\vec{v}]$ làm một vectơ pháp tuyến.

Trong không gian Oxyz, hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ được gọi là **cặp vectơ chỉ phương** của mặt phẳng (P) nếu chúng không cùng phương và có giá nằm trong hoặc song song với mặt phẳng (P).

Nếu $\vec{u},\vec{v}$ là cặp vectơ chỉ phương của (P) thì $[\vec{u},\vec{v}]$ là một vectơ pháp tuyến của (P).



Ví dụ 3. Trong không gian Oxyz, cho các vectơ $\vec{u}=(2;-1;0),\vec{v}=(1;-1;2)$. Gọi (α) là một mặt phẳng song song với các giá của $\vec{u},\vec{v}$. Hãy tìm một vectơ pháp tuyến của (α).

Cách giải:

Ta có $\vec{n}=[\vec{u},\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right)=(-2;-4;-1)\neq\vec{0}$.

Do đó $\vec{u},\vec{v}$ là cặp vectơ chỉ phương và $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (α).

Luyện tập 3. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm không thẳng hàng $A(1;-2;1),B(-2;1;0),C(-2;3;2)$. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

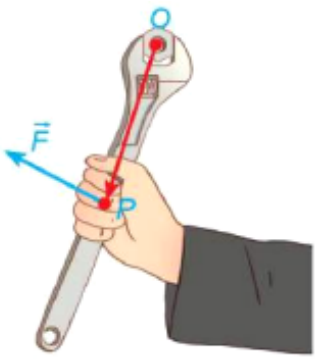
Cách giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB}(-3;3;-1),\overrightarrow{AC}=(-3;5;1)$.

Vì $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ là các vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC) nên mặt phẳng (ABC) nhận $\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$ làm một vectơ pháp tuyến.

Ta có $\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\left(\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & -3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3 & 3\\ -3 & 5\end{vmatrix}\right)=(8;6;-6)$

Vận dụng 1. Moment lực là một đại lượng Vật lí, thể hiện tác động gây ra sự quay quanh một điểm hoặc một trục của một vật thể. Trong không gian Oxyz, với đơn vị đo là mét, nếu tác động vào cán mỏ lết tại vị trí P một lực $\vec{F}$ để vặn con ốc ở vị trí $O(H.5.6)$ thì moment lực $\vec{M}$ được tính bởi công thức $\vec{M}=[\overrightarrow{OP},\vec{F}]$.



a) Cho $\overrightarrow{OP}=(x;y;z),\vec{F}=(a;b;c)$. Tính $\vec{M}$.

b) Giải thích vì sao, nếu giữ nguyên lực tác động $\vec{F}$ trong khi thay vị trí đặt lực từ P sang P' sao cho $\overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OP}$ thì moment lực sẽ tăng lên gấp đôi. Từ đó, ta có thể rút ra điều gì để đỡ tốn sức khi dùng mỏ lét vặn ốc?

Cách giải:

a) Ta có: $[\overrightarrow{OP}, \vec{F}] = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ b & c \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z & x \\ c & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} \right) = (cy - bz; za - cx; xb - ay)$

Do đó, $\vec{M} = (cy - bz; za - cx; xb - ay)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{OP'} = (2x; 2y; 2z)$. Khi đó, moment lực là: $\overrightarrow{M'} = \left[\overrightarrow{OP'}, \vec{F}\right]$

Do đó, $\left[\overrightarrow{OP'}, \vec{F}\right] = \left(\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ b & c \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2z & 2x \\ c & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ a & b \end{vmatrix} \right) = (2cy - 2bz; 2za - 2cx; 2xb - 2ay)$

Suy ra: $\overrightarrow{M'} = (2cy - 2bz; 2za - 2cx; 2xb - 2ay) = 2\vec{M}$

Vậy khi giữ nguyên lực tác động $\vec{F}$ trong khi thay vị trí đặt lực từ P sang P' sao cho $\overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OP}$ thì moment lực sẽ tăng lên gấp đôi.

Từ đó, ta rút ra kết luận là nếu tác động vào cán mỏ lết tại vị trí P cách con ốc ở vị trí O càng lớn thì càng đỡ tốn sức khi dùng mó lết vặn ốc.

II. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG

HĐ4. Hình thành khái niệm phương trình tổng quát của mặt phẳng

Trong không gian O x y z , cho mặt phẳng (α). Gọi $\vec{n} = (A; B; C)$ là một vectơ pháp tuyến của (α) và $M_0(x_0; y_0; z_0)$ là một điểm thuộc (α).

a) Một điểm $M(x; y, z)$ thuộc (α) khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{n}$ và $\overrightarrow{M_0M}$ có mối quan hệ gì?

b) Điểm $M(x; y; z)$ thuộc (α) khi và chỉ khi toạ độ của nó thoả mãn hệ thức nào?

Cách giải:

a) Một điểm M(x; y; z) thuộc (α) khi và chỉ hai vectơ $\vec{n}$ và $\overrightarrow{M_oM}$ vuông góc với nhau.

b) Ta có: $\overrightarrow{M_oM} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$.

Vì M(x;y;z) thuộc (α) thì $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_oM}$.

Suy ra: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Vậy điểm M(x; y; z) thuộc (α) khi và chỉ khi tọa độ của nó thỏa mãn hệ thức

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Trong không gian Oxyz, mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng $Ax+By+Cz+D=0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là **phương trình tổng quát của mặt phẳng** đó.

Chú ý: Trong không gian Oxyz , mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng $Ax+By+Cz+D=0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng đó.

Ví dụ 4: Trong không gian Oxyz, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình tổng quát của một mặt phẳng?

a) $x+2y-3z^2+1=0$;

b) $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}+2=0$;

c) $y+1=0$.

Cách giải:

Trong các phương trình trên, chỉ có phương trình $y+1=0$ có dạng $Ax+By+Cz+D=0$ và thoả mãn A, B, C không đồng thời bằng 0 $(A=0,B=1,C=0)$.

Vì vậy, trong các phương trình trên, chỉ có phương trinh $y+1=0$ là phương trình mặt phẳng.

Luyện tập 4. Trong không gian Oxyz, phương trình nào trong các phương trình sau là phương trình tổng quát của một mặt phẳng?

a) $x^2+2y^2+3z^2-1=0$;

b) $\frac{x}{2}-y+\frac{z}{3}+5=0$;

c) $xy+5=0$.

Cách giải:

a) Đây không phải là phương trình tổng quát của một mặt phẳng vì phương trình không có dạng $Ax+By+Cz+D=0$.

b) Đây là phương trình tổng quát của một mặt phẳng.

c) Đây không phải là phương trình tổng quát của một mặt phẳng vì phương trình không có dạng $Ax+By+Cz+D=0$.

Ví dụ 5. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z+1=0$.

a) Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (α).

b) Vectơ $\vec{m}=(2;4;-2)$ có là vectơ pháp tuyến của (α) hay không?

c) Trong hai điểm $A(1;3;2), B(1;1;4)$, điểm nào thuộc mặt phẳng (α) ?

Cách giải:

a) Mặt phẳng (α) nhận $\vec{n}=(1;2;-1)$ làm một vectơ pháp tuyến.

b) Do $\vec{m}=2\vec{n}$ mà $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (α) nên $\vec{m}$ cũng là vectơ pháp tuyến của (α).

c) Ta cần kiểm tra xem trong hai điểm $A(1;3;2), B(1;1;4)$, điểm nào có tọa độ thoả mãn phương trình mặt phẳng (α).

Do $1+2\cdot3-2+1\neq0$ và $1+2\cdot1-4+1=0$ nên trong hai điểm A, B chỉ có tọa độ điểm B thoả mãn phương trình mặt phẳng (α).

Vậy điểm B thuộc mặt phẳng (α), điểm A không thuộc mặt phẳng (α).

Luyện tập 5. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): x+2=0$.

a) Điểm $A(-2;1;0)$ có thuộc (α) hay không?

b) Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (α).

Cách giải:

a) Mặt phẳng (α) nhận $\vec{n}=(\uparrow;2;-1)$ làm một vectơ pháp tuyến.

b) Do $\vec{m}=2\vec{n}$ mà $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (α) nên $\vec{m}$ cũng là vectơ pháp tuyến của (α).

c) Ta cần kiểm tra xem trong hai điểm $A(1;3;2), B(1;1;4)$, điểm nào có toạ độ thoả mãn phương trình mặt phẳng (α).

Do $1+2\cdot3-2+1\neq0$ và $1+2\cdot1-4+1=0$ nên trong hai điểm A, B chỉ có tọa độ điểm B thoả mãn phương trình mặt phẳng (α). Vậy điểm B thuộc mặt phẳng (α), điểm A không thuộc mặt phẳng (α).