BÀI GIẢNG: SƠ ĐỒ V XỬ LÍ NHANH TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ
CHUYÊN ĐỀ: TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ
MÔN: TOÁN 12 (KHÓA S2- LUYỆN THI TỐT NGHIỆP THPTQG KẾT HỢP ĐGNL)
GIÁO VIÊN: NGUYỄN CÔNG CHÍNH

MỤC TIÊU

✓ *Áp dụng sơ đồ V để xử lí nhanh tính đơn điệu và cực trị của một số bài toán về tính đơn điệu và cực trị của hàm số.*

I. NGUYÊN LÝ

Là sự rút gọn của bảng biến thiên và đồ thị

Nắm được quy tắc xét dấu của đạo hàm kết hợp với nhận dạng đồ thị

Giải quyết được các dạng toán về tính đơn điệu, cực trị, max-min, tương giao; một số câu hỏi về đơn diệu cực trị hàm hợp, các bài toán chứa tham số m.

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^2 - 4x + 3$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $y = x^4 - 2x^2 + 3$

d) $y = -x^4 - 4x^2 + 5$

Bài 2. Xét nhanh đơn điệu và cực trị của các hàm số

a) $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

b) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

c) $y = x^2 \cdot e^{2x}$.

d) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

Bài 3. Cho $f(x)$ có $f'(x) = (x+1)^2(x-2)(x+2) \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm nhanh số cực trị của các hàm số sau:

a) $y = f(x)$

b) $y = f(ax+b)$ $(a \neq 0)$

c) $y = f\left(x^2 - 4x\right)$

d) $y = f\left(x^3 - 3x\right)$

e) $y = f\left(x^4 - 2x^2\right)$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^2 - 4x + 3$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

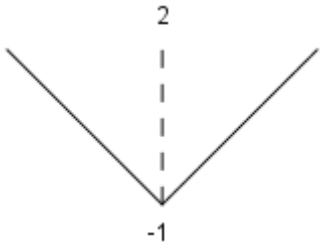
c) $y = x^4 - 2x^2 + 3$

d) $y = -x^4 - 4x^2 + 5$

Cách giải:

a) $y = x^2 - 4x + 3$

$y' = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$



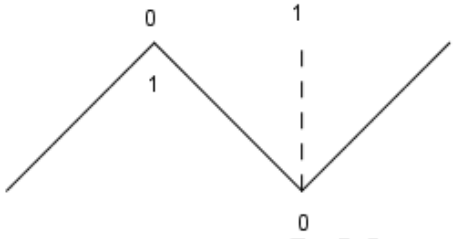
Hàm số nghịch trên $(-\infty, 2)$, đồng trên $(2, +\infty)$.

Cực tiểu tại $x = 2$ với $y = -1$.

b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

$y' = 6x^2 - 6x$
$= 6x(x - 1)$

$y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \rightarrow y = 1 \\ x = 1 \rightarrow y = 0 \end{array}\right.$



Hàm số đồng trên $(-\infty, 0)$ và $(1, +\infty)$, nghịch biến trên $(0,1)$.

Cực đại tại $x = 0, y = 1$.

Cực tiểu tại $x = 1, y = 0$.

c) $y = x^4 - 2x^2 + 3$

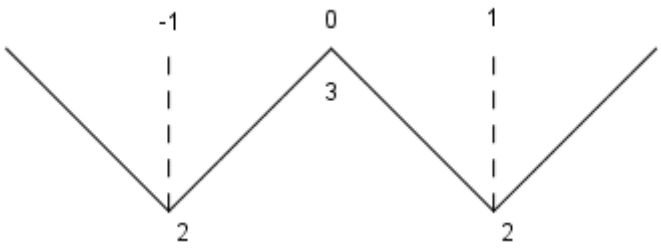
$y' = 4x^3 - 4x$

$= 4x\left(x^2 - 1\right)$

$= 4x(x-1)(x+1)$

$y' = 0 \Rightarrow 4x(x-1)(x+1) = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \rightarrow y = 2 \\ x = 0 \rightarrow y = 2 \\ x = 1 \rightarrow y = 3 \end{array}\right.$



Hàm số đồng biến trên $(-\infty,-1)$ và $(0,1)$.

Hàm số nghịch biến trên $(-1,0)$ và $(1,+\infty)$.

Cực đại tại $x = -1, x = 1; y = 2$.

Cực tiểu tại $x = 0, y = 3$.

d) $y = -x^4 - 4x^2 + 5$

$y' = -4x^3 - 8x = -4x\left(x^2 + 2\right)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 5$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty,0)$.

Hàm số nghịch biến trên $(0,+\infty)$.

Cực đại tại $x = 0, y = 5$.

Bài 2. Xét nhanh đơn điệu và cực trị của các hàm số

a) $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

b) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

c) $y = x^2 \cdot e^{2x}$.

d) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

Cách giải:

a) $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

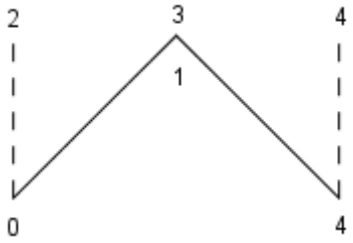
+ ĐKXĐ: $-x^2 + 6x - 8 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2 \le x \le 4 \Rightarrow D = [2;4]$

+ $y' = \dfrac{-2x+6}{2\sqrt{-x^2+6x-1}} = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn đkxđ)

Hàm số có hệ số $a < 0 \Rightarrow$ nhánh cuối của đồ thị đi xuống

$\Rightarrow x = 3$ là giá trị cực đại



Hàm đồng biến trên $(2,3]$, nghịch biến trên $[3,4)$.

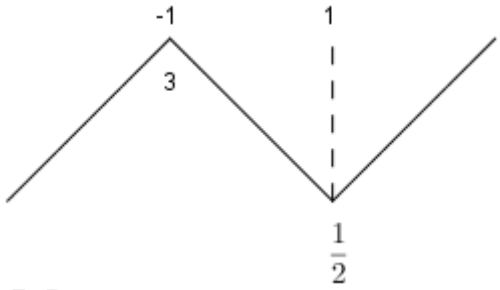
Cực đại tại $x = 3$, giá trị cực đại $y(3) = 1$.

b) $y = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

ĐKXĐ: $x^2+x+1 > 0 \ \forall x \Rightarrow D = \mathbb{R}$

$y' = \dfrac{ax^2+bx+c}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \dfrac{2x^2-2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$



Hàm đồng biến trên $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$.

Hàm nghịch biến trên $(-1,1)$.

Cực đại tại $x = -1$ với giá trị cực đại $y(-1) = 3$.

Cực tiểu tại $x = 1$ với giá trị cực tiểu $y(1) = \dfrac{1}{2}$.

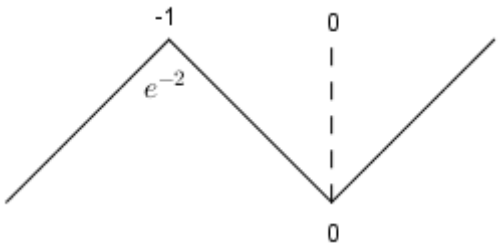
c) $y = x^2 \cdot e^{2x}$.

$y' = 2x \cdot e^{2x} + 2x^2 \cdot e^{2x}$

$= 2x \cdot e^{2x}(1+x)$

$y' = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$



Hàm đồng biến trên $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$.

Hàm nghịch biến trên $(-1,0)$.

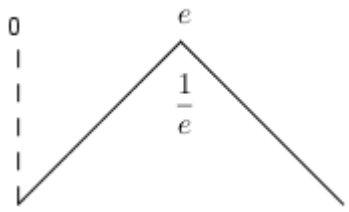
Cực tiểu tại $x=-1$ với giá trị cực tiểu $y(-1)=\dfrac{1}{e^2}$.

Cực đại tại $x=0$ với giá trị cực đại $y(0)=0$.

d) $y=\dfrac{\ln x}{x}$

$y' = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$



Hàm đồng biến trên $(0,e)$, nghịch biến trên (e,∞).

Cực đại tại $x=e$ với giá trị cực đại $y(e)=\dfrac{1}{e}$.

Bài 3. Cho $f(x)$ có $f'(x)=(x+1)^2(x-2)(x+2)\forall x\in\mathbb{R}$. Tìm nhanh số cực trị của các hàm số sau:

a) $y=f(x)$

b) $y=f(ax+b)$ $(a\neq 0)$

c) $y=f\left(x^2-4x\right)$

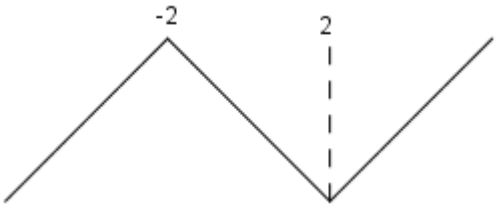
d) $y=f\left(x^3-3x\right)$

e) $y=f\left(x^4-2x^2\right)$

Cách giải:

$f'(x)=0$ có 2 nghiệm đơn $x=\pm 2$

a) $y=f(x)$



Hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị

b) $y=f(ax+b)\ (a\neq 0)$

$$y'=a\cdot y'(ax+b)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}ax+b=2\\ax+b=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2-b}{a}\\x=\dfrac{-2-b}{a}\end{array}\right.$$

Vậy hàm số có 2 điểm cực trị.

c) $y=f\left(x^2-4x\right)$

Xét $y=f(u)\to y'=u'\cdot f'(u)=0\left[\begin{array}{l}u'=0\Rightarrow x=x_0\\f'(u)=0\end{array}\right.$

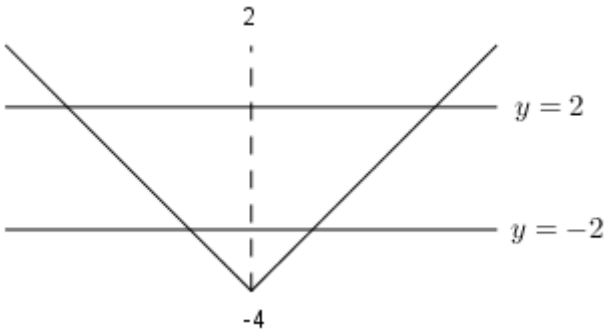
$$f'(u)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}u=\alpha\\u=\beta\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$Bài toán về tương giao giữa hai đồ thị $\left\{\begin{array}{l}y=u\\y=\alpha;y=\beta\end{array}\right.$

$\Rightarrow$Số điểm cực trị $f(u)$ = số điểm cực trị của u + số nghiệm bội lẻ của $u=\alpha;u=\beta$ ($\alpha;\beta$ là cực trị gốc của $f(x)$)

Đặt $u=x^2-4x\to u'=2x-4=0\Leftrightarrow x=2$

Số điểm cực trị $f(u)$ = số điểm cực trị của u + số nghiệm bội lẻ của $u=2;u=-2$

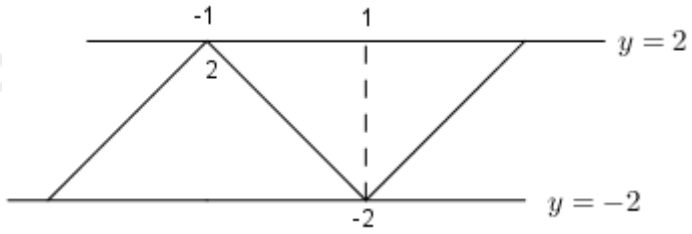


$\Rightarrow$Số điểm cực trị $f(u)=1+4=5$

d) $y=f\left(x^3-3x\right)$

Đặt $u=x^3-3x\to u'=3x^2-3=0\to x=\pm 1$

Cần giải $\left[\begin{array}{l} u=2 \\ u=-2 \end{array}\right.$

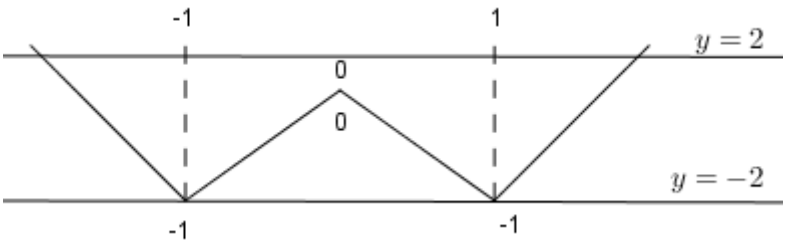


$\Rightarrow$Số điểm cực trị $f(u)=2+2=3$

e) $y=f\left(x^4-2x^2\right)$

Đặt $u=x^4-2x^2 \Rightarrow u'=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Cần giải $\left[\begin{array}{l} u=2 \\ u=-2 \end{array}\right.$



$\Rightarrow$Số điểm cực trị $f(u)=3+2=5$