BÀI GIẢNG: XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN
CHUYÊN ĐỀ: XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN
MÔN: TOÁN 12
GIÁO VIÊN: NGUYỄN HOÀNG TÙNG

MỤC TIÊU

- ✓ *Nắm được công thức tính , các phương pháp giải bài toán xác suất có điều kiện .*
- ✓ *Áp dụng giải các bài toán xác suất có điều kiện .*

I. ĐỊNH NGHĨA

Xét một phép thử có không gian mẫu Ω

Biến cố A,B liên quan đến phép thử.

Tính $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)};P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}$

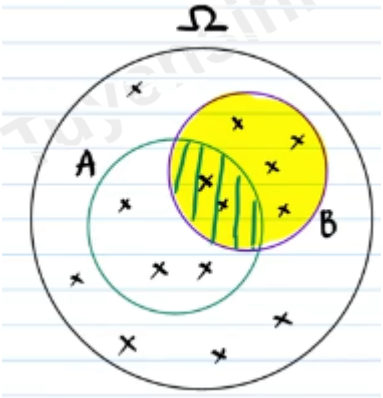
Tính xác suất xảy ra của A khi biết biến cố B đã xảy ra

+ Nếu biết B đã xảy ra thì B trở thành không gian mẫu mới

Khi hiệu: $P(A|\ B)$ là xác suất để A xảy ra khi biết B đã xảy ra

$P(A|\ B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ (ví dụ hình trên)

$P(A|\ B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$



II. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tính xác suất có điều kiện sử dụng công thức

1. Phương pháp

Cho hai biến cố A và B.

Xác suất của biến cố A, tính trong điều kiện biết rằng biến cố B đã xảy ra, được gọi là xác suất của biến A với điều kiện B và kí hiệu là $P(A|B)$.

Cho hai biến cố A và B bất kỳ, với $P(B)>0$. Khi đó $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

Ví dụ 1: Lớp 12 Al có 25 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Trong số đó có 16 bạn nam và 6 bạn nữ thích chơi thể thao. Chọn một bạn bất kì của lớp 12A1, tính xác suất

a) Học sinh được chọn thích chơi thể thao, biết rằng học sinh đó là nữ.

b) Học sinh được chọn là nữ, biết rằng học sinh đó thích chơi thể thao.

Ví dụ 2: Tại một sở thú, các em bé được đặt Ví dụ hôi: Sắp tới vườn thú của chúng ta sẽ nhận nuôi thêm một con vật nữa, con thích sư tử hay voi hơn?. Kết quả khảo sát của các bé như sau:

	Sư tử	Voi	Tổng cộng
Bé trai	90	110	200
Bé gái	75	85	160
Tổng cộng	165	195	360

Chọn ngẫu nhiên một bé tham gia khảo sát, tính xác suất đế

a) Bé thích sư tử, biết bé được chọn là bé trai.

b) Bé thích voi, biết bé được chọn là bé gái.

Ví dụ 3: Một viện nghiên cứu về An toàn giao thông muốn tìm hiểu về mối quan hệ giữa việc thắt dây an toàn khi tham gia giao thông và nguy cơ tứ vong của người lái xe khi xảy ra tai nạn giao thông. Viện tiến hành xem xét 577006 tai nạn thì có kết quả như bảng sau:

Kết quả / Trường hợp	Tử vong	Sống sót
Có thắt dây an toàn	1 601	162 527
Không thắt dây an toàn	510	412 368

a) Tính xác suất người lái xe tử vong trong trường hợp không thắt dây an toàn.

b) Tính xác suất người lái xe tử vong trong trường hợp có thắt dây an toàn.

c) So sánh hai trường hợp trên.

Ví dụ 4: Cho hai biến cố A và B có $P(A)=0,6, P(B)=0,36$ và $P(A|B)=0,45$.

Tính $P(AB), P(\bar{A}B), P(\bar{A}|B), P(A|\bar{B})$.

Ví dụ 5: Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(B)=0,6, P(A\cup B)=0,8$. Tính $P(A|\bar{B})$, $P(B|A\cup\bar{B})$.

Ví dụ 6: Cho hai biến cố A và B có $P(A)=0,4, P(A|B)=0,5$ và $P(A\cup B)=0,58$.

Tính $P(AB), P(A|\bar{B}), P(\bar{A}\bar{B})$.

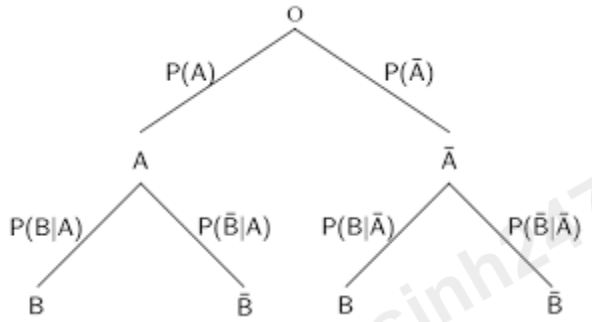
Dạng 2: Tính xác suất có điều kiện sử dụng sơ đồ hình cây

1. Phương pháp

Xây dựng sơ đồ cây theo mẫu (hình bên dưới) và xác định xác suất trên mỗi nhánh.

Tính $P(A\cap B)$ bằng xác suất của lộ trình $(O-A-B)$

Tính $P(B)$ bằng tổng xác suất của 2 lộ trình dẫn đến B là $(O-A-B)$ và $(O-\bar{A}-B)$.



Ví dụ 1: Ông An hằng ngày đi làm bằng xe máy hoặc xe buýt. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe buýt thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe máy là 0,4 . Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe máy thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe buýt là 0,7 . Xét một tuần mà thứ Hai ông An đi làm bằng xe buýt. Tính xác suất để thứ Tư trong tuần đó, ông An đi làm bằng xe máy

Ví dụ 2: Tại một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử tỉ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất xưởng ra thị trường, các linh kiện điện tử đều phải qua khâu kiểm tra chất lượng để đóng dấu OTK. Vì sự kiểm tra không tuyệt đối hoàn hảo nên

- Nếu một linh kiện điện tử đạt tiêu chuẩn thì nó có xác suất 0,99 đrợc đóng dấu OTK;
- Nếu một linh kiện điện tư không đạt tiêu chuẩn thi nó có xác suất 0,95 không đurợc đóng dấu OTK.

Chọn ngẫu nhiên một linh kiện điện tử của nhà máy này trên thị trường. Dùng sơ đồ hình cây, hãy mô tả cách tính xác suất đề linh kiện điện tử được chọn không được đóng dấu OTK.

Ví dụ 3: Có 5% dân số mắc bệnh X. Có một xét nghiệm để phát hiện bệnh X. Đối với người mắc bệnh X, xác suất xét nghiệm này không dương tính là 2%. Đối với người không mắc bệnh X, xác suất xét nghiệm này dương tính là 3%. Chọn ngẫu nhiên một người và tiến hành xét nghiệm. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất các biến cố: W : "người đó không bị bệnh X và kết quả xét nghiệm dương tính"

Y : "người đó bị bệnh X và kết quả xét nghiệm không dương tính".

HƯỚNG DẪN GIẢI

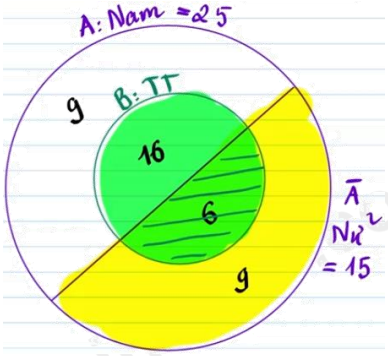
Dạng 1: Tính xác suất có điều kiện sử dụng công thức

Ví dụ 1: Lớp 12 Al có 25 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Trong số đó có 16 bạn nam và 6 bạn nữ thích chơi thể thao. Chọn một bạn bất kì của lớp 12A1, tính xác suất

a) Học sinh được chọn thích chơi thể thao, biết rằng học sinh đó là nữ.

b) Học sinh được chọn là nữ, biết rằng học sinh đó thích chơi thể thao.

Cách giải:



Gọi A là biến cố học sinh lấy ra là nam

B là biến cố học sinh thích thể thao

a) $P(B|\bar{A}) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0,4$

b) $P(\bar{A}|B) = \frac{6}{6+16} = \frac{3}{11}$

Ví dụ 2: Tại một sở thú, các em bé được đặt Ví dụ hôi: Sắp tới vườn thú của chúng ta sẽ nhận nuôi thêm một con vật nữa, con thích sư tử hay voi hơn?. Kết quả khảo sát của các bé như sau:

	Sư tử	Voi	Tổng cộng
Bé trai	90	110	200
Bé gái	75	85	160
Tổng cộng	165	195	360

Chọn ngẫu nhiên một bé tham gia khảo sát, tính xác suất đế

a) Bé thích sư tử, biết bé được chọn là bé trai.

b) Bé thích voi, biết bé được chọn là bé gái.

Cách giải:

Gọi A là biến cố chọn được bé trai

B là biến cố bạn ấy thích sư tử

a)Xác suất để bé thích sư tử, biết bé được chọn là bé trai là: $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{90}{200} = \frac{9}{20}$

b) Xác suất để bé thích voi, biết bé được chọn là bé gái là $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{n(\bar{B}\cdot\bar{A})}{n(\bar{A})} = \frac{85}{160} = \frac{17}{32}$

Ví dụ 3: Một viện nghiên cứu về An toàn giao thông muốn tìm hiểu về mối quan hệ giữa việc thắt dây an toàn khi tham gia giao thông và nguy cơ tử vong của người lái xe khi xảy ra tai nạn giao thông. Viện tiến hành xem xét 577006 tai nạn thì có kết quả như bảng sau:

Kết quả / Trường hợp	Tử vong	Sống sót
Có thắt dây an toàn	1 601	162 527
Không thắt dây an toàn	510	412 368

a) Tính xác suất người lái xe tử vong trong trường hợp không thắt dây an toàn.

b) Tính xác suất người lái xe tử vong trong trường hợp có thắt dây an toàn.

c) So sánh hai trường hợp trên.

Cách giải:

Gọi A là biến cố người lái xe tử vong

B là biến cố người lái xe có thắt dây an toàn

a) $P(A|\bar{B}) = \frac{510}{510+412368} = \frac{85}{68813} \approx 0{,}124\%$

b) $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1601}{1601+162527} = 0{,}975\%$

c) Xác suất người lái xe tử vong trong trường hợp không thắt dây an toàn lớn hơn xác suất người lái xe tử vong trong trường hợp có thắt dây an toàn.

Ví dụ 4: Cho hai biến cố A và B có $P(A)=0,6, P(B)=0,36$ và $P(A|B)=0,45$.

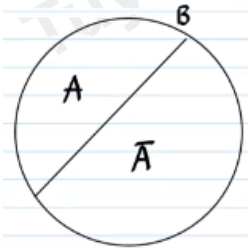
Tính $P(AB), P(\bar{A}B), P(\bar{A}|B), P(A|\bar{B})$.

Cách giải:

+) $P(AB)$

Ta có $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Leftrightarrow P(AB) = P(B)\cdot P(A|B) = 0,36\cdot 0,45 = 0,162$

+ $P(\bar{A}B)$

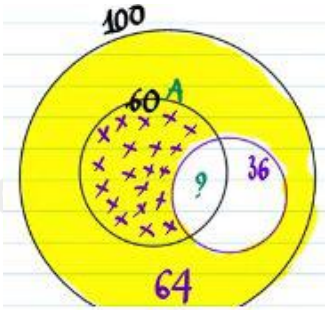


Từ $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = 0,55$

Khi đó $P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A}\cdot B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(\bar{A}\cdot B) = P(B)\cdot P(\bar{A}|B) = 0,36\cdot 0,55 = 0,198$

+) $P(A|\bar{B})$

$P(A|\bar{B}) = \frac{n(A\bar{B})}{n(\bar{B})} = \frac{60-16,2}{64} = \frac{219}{320}$



Ví dụ 5: Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(B)=0,6, P(A\cup B)=0,8$. Tính $P(A|\ \bar{B})$, $P(B|\ A\cup\bar{B})$.

Cách giải:

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$ với A, B độc lập

$P(A|\ B)=P(A)$, thật vậy $P(A|\ B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)}=P(A)$

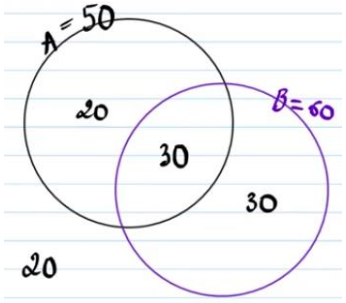
a) $P(A|\ \bar{B})=P(A)=x$

Chú ý: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

Ta có $0,8=x+0,6-x\cdot 0,6$

$\Leftrightarrow x=0,5$

Vậy $P(A)=0,5$



b) $P(B|\ A\cup\bar{B})$

$|\Omega|=100$

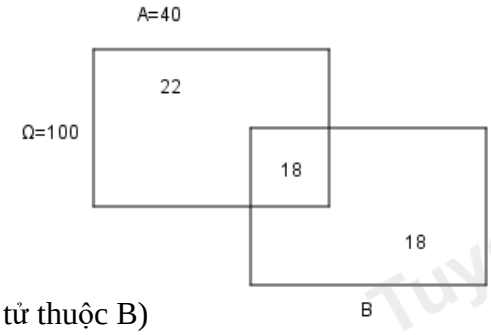
Ta có $P(A\cap B)=P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0,3$

$P(B|\ A\cup\bar{B})=\dfrac{n(B\cap A\cup\bar{B})}{n(A\cup\bar{B})}=\dfrac{n(B\cap A)}{n(A\cup\bar{B})}=\dfrac{30}{70}=\dfrac{3}{7}$

Ví dụ 6: Cho hai biến cố A và B có $P(A)=0,4, P(A|\ B)=0,5$ và $P(A\cup B)=0,58$. Tính $P(AB), P(A|\ \bar{B}), P(\bar{A}\bar{B})$.

Cách giải:

+) $P(A|\ B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=0,5$ (vàng = xanh, vì xanh bằng một nửa của B)



$\Rightarrow n(A\cap B)=18$

+) $P(AB)=\dfrac{18}{100}=0,18$

$P(A|\ \bar{B})=\dfrac{n(A\cap\bar{B})}{n(\bar{B})}=\dfrac{22}{100-36}=\dfrac{11}{32}$ ($A\cap\bar{B}$ khi và chỉ khi lấy A, bỏ phần tử thuộc B)

+) $P(\bar{A}\cdot\bar{B})=P(\bar{B})\cdot P(\bar{A}|\ \bar{B})=P(\bar{B})\cdot[1-P(A|\ \bar{B})]$

$$= 0,64 \cdot \left[1 - \frac{11}{32}\right] = \frac{21}{50}$$

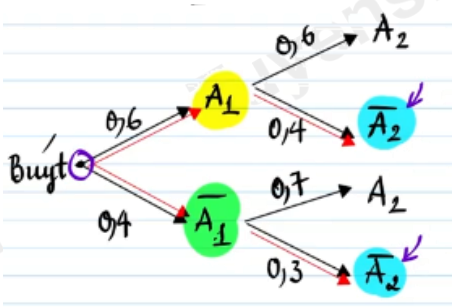
Dạng 2: Tính xác suất có điều kiện sử dụng sơ đồ hình cây

Ví dụ 1: Ông An hằng ngày đi làm bằng xe máy hoặc xe buýt. Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe buýt thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe máy là 0,4 . Nếu hôm nay ông đi làm bằng xe máy thì xác suất để hôm sau ông đi làm bằng xe buýt là 0,7 . Xét một tuần mà thứ Hai ông An đi làm bằng xe buýt. Tính xác suất để thứ Tư trong tuần đó, ông An đi làm bằng xe máy.

Cách giải:

Gọi A_1: "Ông An đi xe bus vào ngày 1"

A_2: "Ông An đi xe bus vào ngày 2"



$$P(\overline{A_2}) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2} | A_1) + P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2} | \overline{A_1})$$

$$= 0,6 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,3 = 0,36$$

Ví dụ 2: Tại một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử tỉ lệ sản phẩm đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất xưởng ra thị trường, các linh kiện điện tử đều phải qua khâu kiểm tra chất lượng để đóng dấu OTK. Vì sự kiểm tra không tuyệt đối hoàn hảo nên

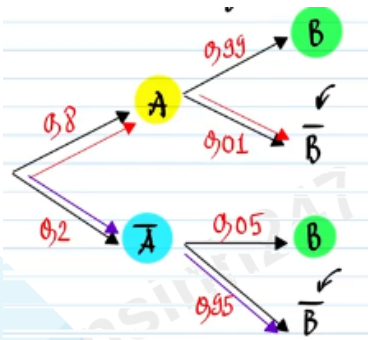
- Nếu một linh kiện điện tử đạt tiêu chuẩn thì nó có xác suất 0,99 đợc đóng dấu OTK;
- Nếu một linh kiện điện tư không đạt tiêu chuẩn thi nó có xác suất 0,95 không đươc đóng dấu OTK.

Chọn ngẫu nhiên một linh kiện điện tử của nhà máy này trên thị trường. Dùng sơ đồ hình cây, hãy mô tả cách tính xác suất đề linh kiện điện tử được chọn không được đóng dấu OTK.

Cách giải:

Gọi A: " Linh kiện điện tử đạt tiêu chuẩn"

B: "Linh kiện điện tử được đóng dấu"



$P(\overline{B}) = 0,8 \cdot 0,01 + 0,2 \cdot 0,95 = 27\%$

Công thức xác suất toàn phần: $P(B) = P(A) \cdot P(B|\ A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\ \overline{A})$

Ví dụ 3: Có 5% dân số mắc bệnh X. Có một xét nghiệm để phát hiện bệnh X. Đối với người mắc bệnh X, xác suất xét nghiệm này không dương tính là 2%. Đối với người không mắc bệnh X, xác suất xét nghiệm này dương tính là 3%. Chọn ngẫu nhiên một người và tiến hành xét nghiệm. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất các biến cố: W : "người đó không bị bệnh X và kết quả xét nghiệm dương tính"

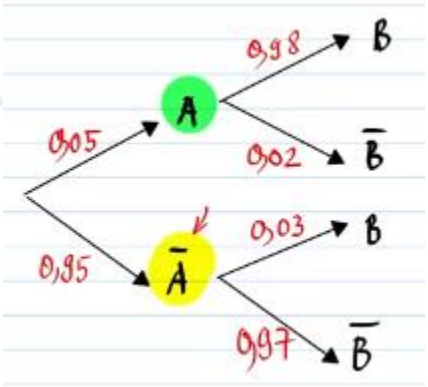
Y : "người đó bị bệnh X và kết quả xét nghiệm không dương tính"

Cách giải:

Gọi A: "Người đó mắc bệnh"

B: " Người đó có kết quả xét nghiệm dương tính"

$P(B|\ A) = 0,98; P(\overline{B}|\ \overline{A}) = 0,97$



$P(W) = P(\overline{A}) \cdot P(B|\ \overline{A}) = 0,95 \cdot 0,03 = 0,0285$

$P(Y) = P(A) \cdot P(\overline{B}|\ A) = 0,05 \cdot 0,02 = 0,001$