BÀI GIẢNG: CÔNG THỨC VÀ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC
CHUYÊN ĐỀ: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC
MÔN: TOÁN 11
GIÁO VIÊN: ĐOÀN NGỌC DUY TRÌNH

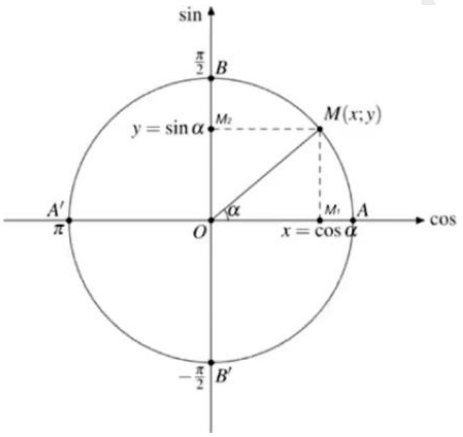
MỤC TIÊU

- ✓ *Nhận biết các công thức lượng giác và hàm số lượng giác*
- ✓ *Áp dụng giải các bài toán lượng giác*

I. CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1 Công thức cơ bản

Trên đường tròn lượng giác, gọi M là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α. Khi đó:



$\sin\alpha = y_M$

$\cos\alpha = x_M$

$\tan\alpha = \dfrac{y_M}{x_M} \quad (x_M \neq 0)$

$\cot\alpha = \dfrac{x_M}{y_M} \quad (y_M \neq 0)$

* Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác:

Nhận biết các công thức lượng giác và hàm số lượng giác

Áp dụng giải các bài toán lượng giác

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$ $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1\left(\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right);$

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right);$ $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 1: Cho $\tan\alpha = \dfrac{4}{3}$ với $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Tính $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$.

Cách giải:

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \dfrac{25}{9}$

$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$

$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha = \frac{3}{5}\\ \cos\alpha = -\frac{3}{5}\end{array}\right.$

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\begin{cases}\cos\alpha < 0\\ \sin\alpha < 0\end{cases}$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{5}$

Có $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{-4}{5}$

Vậy $\cos\alpha = -\frac{3}{5}; \sin\alpha = \frac{-4}{5}$.

2 Giá trị lượng giác của các góc lượng giác có liên quan đặc biệt

* Hai góc đối nhau: α và $-\alpha$. (cos đối)

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha;$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$

* Hai góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$. (sin bù)

$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha;$
$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha;$
$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha;$
$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha.$

* Hai góc phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$. (phụ chéo)

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos;$
$\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha;$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha;$
$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha.$

* Hai góc hơn kém nhau π: α và $\alpha + \pi$ (tan-cot)

$\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha;$
$\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha;$
$\tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha;$
$\cot(\alpha+\pi) = \cot\alpha.$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức $P = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(-\alpha + 6\pi) - \tan(\alpha+\pi)\cot(-\alpha)$.

Cách giải:

$P = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right] + \cos(-\alpha) - \tan\alpha\cdot(-\cot\alpha)$

$= -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \cos\alpha + \tan\alpha\cdot\cot\alpha$

$= -\cos\alpha + \cos\alpha + 1 = 1$

3 Công thức cộng và công thức nhân đôi

a) Công thức cộng

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.$

b) Công thức nhân đôi

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}.$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức $Q = \dfrac{1+\sin 2x}{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)} - \dfrac{1+\cos 2x}{\cos x}.$

Cách giải:

$$Q = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x}{\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)} - \frac{1+2\cos^2 x - 1}{\cos x}$$

$$Q = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} - \frac{2\cos^2 x}{\cos x}$$

$$Q = \sin x + \cos x - 2\cos x$$

$$Q = \sin x - \cos x$$

4 Công thức biến đổi tổng thành tích và công thức biến đổi tích thành tổng

a) Công thức biến đổi tổng thành tích

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2};$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2};$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2};$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$

b) Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)];$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$

$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)].$

Ví dụ 4: Cho biểu thức $P=\cos 7x\cos 3x-\cos 5x\cos x+\cos^2 3x$. Biết sau khi thu gọn, biểu thức P có dạng $m\cdot\cos^2(nx)$, với $m,n\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T=m+n$.

A. 8. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 6.

Cách giải:

$$P=\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 10)-\frac{1}{2}\cdot(\cos 4x+\cos 6x)+\frac{\cos 6x+1}{2}$$

$$P=\frac{\cos 10x}{2}-\frac{\cos 6x}{2}+\frac{\cos 6x}{2}+\frac{1}{2}$$

$$P=\frac{\cos 10x+1}{2}$$

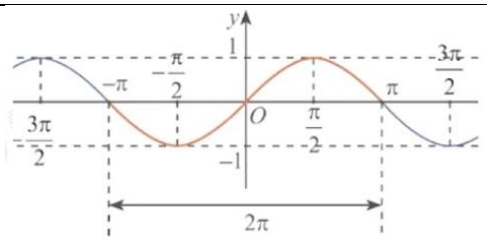
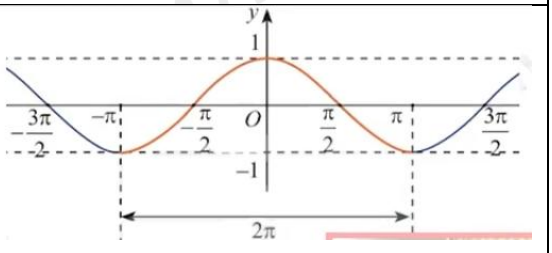
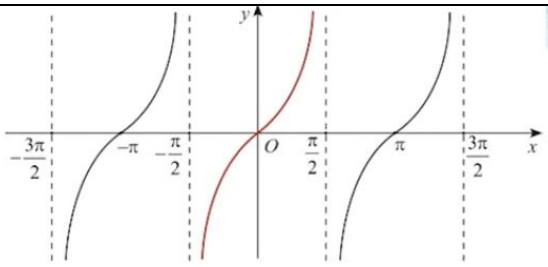
$$P=\frac{2\cos^2 5x-1+1}{2}=\cos^2 5x$$

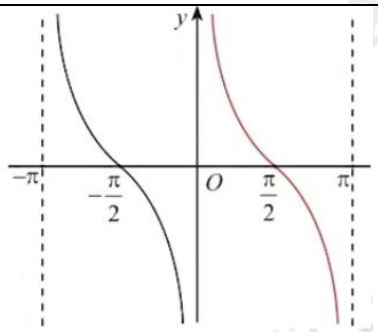
$$\Rightarrow\begin{cases}m=1\\n=5\end{cases}$$

Vậy $T=m+n=6$.

II. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

Bảng tổng hợp lý thuyết các hàm số lượng giác và đồ thị:

Hàm số	Tập xác định	Tập giá trị	Tuần hoàn với chu kì	Tính chẵn/lẻ	Đồ thị
$y=\sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1;1]$	2π	Hàm lẻ	
$y=\cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1;1]$	2π	Hàm chẵn	
$y=\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\middle\vert k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$	π	Hàm lẻ	

$y=\cot x$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	π	Hàm lẻ	

Ví dụ 5: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A=1-\cos 3x$.

b) $B=2\sin^2 x-5\sin x-1$.

Cách giải:

a) $A=1-\cos 3x$.

Ta có $\begin{cases}\cos 3x\le 1\\ \cos 3x\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\cos 3x\ge -1\\ -\cos 3x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-\cos 3x\ge 0\\ 1-\cos 3x\le 2\end{cases}$

$\Rightarrow 0\le A\le 2$

+) GTLN của A là 2 đạt được khi $\cos 3x=-1$

$\Leftrightarrow 3x=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k2\pi}{3}(k\in\mathbb{Z})$

+) GTNN của A là 0 đạt được khi $\cos 3x=1$

$\Leftrightarrow 3x=k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{k2\pi}{3}(k\in\mathbb{Z})$

b) $B=2\sin^2 x-5\sin x-1$.

Đặt $t=\sin x$, $t\in[-1;1]$

$B=2t^2-5t-1$

$f(t)=2t^2-5t-1$ trên $[-1;1]$

t	-1		1
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	6	↘	-4

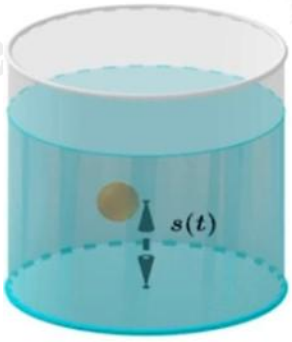
+) GTLN của B là 6 đạt được khi $t=-1$

$\Leftrightarrow \sin x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2x(k\in\mathbb{Z})$

+) GTNN của B là -4 đạt được khi $t=1$

$\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 6: Một cái thùng hình trụ không có nắp, bên trong thùng có chứa một lượng nước. Một cái nút chai có kích thước không đáng kể, nhấp nhô lên xuống trong thùng (xem Hình 1), biết rằng khoảng cách từ tâm nút chai đến đáy thùng được cho bởi công thức $s(t) = 50 + 2\cos \pi t (\text{cm})$, theo thời gian t giây $(t \geq 0)$.



Hình 1

a) Xác định giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ tâm nút chai đến đáy thùng.

b) Trong 5 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu nhấp nhô, khoảng cách từ tâm nút chai đến đáy thùng tăng trong các khoảng thời gian nào?

Cách giải:

a) Ta có: $\cos \pi t \geq -1 \Rightarrow 2\cos \pi t \geq -2 \Rightarrow 50 + 2\cos \pi t \geq 48$

GTNN của $s(t)$ là 48, đạt được khi $\pi t = \pi + k2\pi \Leftrightarrow t = 1 + 2k (k \in \mathbb{Z})$

b) $0 \leq t \leq 5$

$s(t) = 50 + 2\cos(\pi t)$

Ta cần tìm khoảng đồng biến của $y = \cos \pi t$ $(t \in [0;5])$

$\pi t \in (-\pi + k2\pi; k2\pi)$

$\Rightarrow \begin{cases} -\pi + k2\pi \geq \pi \cdot 0 \\ k2\pi \leq \pi \cdot 5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} k \geq \frac{1}{2} \\ k \leq \frac{5}{2} \end{cases} (k \in Z)$

$k \in \{1;2\}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \pi t \in (\pi; 2\pi) \Rightarrow t \in (1;2) \\ \pi t \in (3\pi; 4\pi) \Rightarrow t \in (3;4) \end{array} \right.$

Vậy trong 5 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu nhấp nhô, khoảng cách từ tâm nút chai đến đáy thùng tăng trong các khoảng thời gian 1 đến 2 giây, hoặc 3 đến 4 giây.