BÀI GIẢNG: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC
CHUYÊN ĐỀ: HÀM LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC
MÔN: TOÁN 11
GIÁO VIÊN: NGÔ HỒNG QUÂN

MỤC TIÊU

- ✓ *Hiểu và ghi nhớ các công thức lượng giác cơ bản.*
- ✓ *Sử dụng thành thạo các công thức lượng giác để biến đổi và rút gọn các biểu thức lượng giác.*

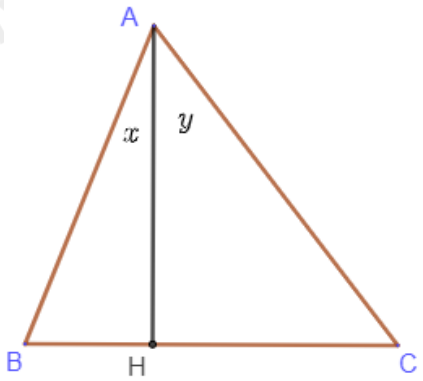
I. CÔNG THỨC CỘNG

Từ cách xác định giá trị lượng giác của từng góc lượng giác, ta xây dựng các giá trị lượng giác cho tổng/hiệu các góc ra sao?

1. Cosin của tổng và hiệu

Xét tam giác ABC, $AH \perp BC$ $(H \in BC)$. Ta có:

$$\sin x = \frac{BH}{AB},\ \cos x = \frac{AH}{AB},\ \sin y = \frac{CH}{AC},\ \cos y = \frac{AH}{AC}.$$



Ta có:

$$\cos(x+y) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - (BH+HC)^2}{2.AB.AC}$$
$$= \frac{AB^2 + AC^2 - BH^2 + 2BH.HC - HC^2}{2.AB.AC}$$
$$= \frac{AH^2 - BH.HC}{AB.AC}$$
$$= \frac{AH}{AB}.\frac{AH}{AC} - \frac{BH}{AB}.\frac{HC}{AC}$$
$$= \cos x.\cos y - \sin x.\sin y.$$

Ta chứng minh được: $\cos(x+y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$

Có thể suy ra công thức cho $\cos(x-y)$ bằng cách viết $\cos(x-y) = \cos[x+(-y)]$ là

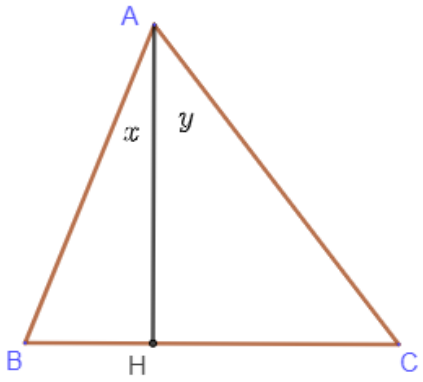
$$\cos(x-y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y.$$

2. Sin của tổng và hiệu

Xét tam giác ABC, $AH \perp BC$ $(H \in BC)$, có:

$$\sin x = \frac{BH}{AB},\ \cos x = \frac{AH}{AB},\ \sin y = \frac{CH}{AC},\ \cos y = \frac{AH}{AC}.$$

Ta có: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin BAC=\frac{1}{2}AB.AC.\sin(x+y)$



$$\begin{aligned}\sin(x+y)&=\frac{2.S_{ABC}}{AB.AC}=\frac{AH.BC}{AB.AC}\\&=\frac{AH.(BH+CH)}{AB.AC}\\&=\frac{BH}{AB}.\frac{AH}{AC}+\frac{AH}{AB}.\frac{CH}{AC}\\&=\sin x.\cos y+\cos x.\sin y.\end{aligned}$$

Ta chứng minh được: $\sin(x+y)=\sin x.\cos y-\cos x.\sin y$

Có thể suy ra công thức cho $\cos(x-y)$ bằng cách viết $\sin(x-y)=\sin[x+(-y)]$ là

$\sin(x-y)=\sin x.\cos y-\cos x.\sin y$.

3. Tan của tổng và hiệu

Ta có:

$$\begin{aligned}\tan(x+y)&=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x.\cos y+\cos x.\sin y}{\cos x.\cos y-\sin x.\sin x}\\&=\frac{\frac{\sin x.\cos y}{\cos x.\cos y}+\frac{\cos x.\sin y}{\cos x.\cos y}}{1-\frac{\sin x.\sin y}{\cos x.\cos y}}\\&=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}\end{aligned}$$

Ta chứng minh được: $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}$.

Tương tự ta có: $\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x.\tan y}$.

Công thức cộng lượng giác:

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y;$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y;$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y;$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y;$$

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y};$$

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x.\tan y}.$$

Cách nhớ:

"sin thì sin cos cos sin,

cos thì cos cos sin sin dấu trừ."

"tan của tổng bằng tổng tan chia cho 1 trừ tích tan,

tan của hiệu bằng hiệu tan chia cho 1 cộng tích tan"

Ví dụ 1: Tính $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$; $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$;

Cách giải:

Có $\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}$, suy ra $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

Có $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, suy ra

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

Có $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, suy ra $\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}.\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

II. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

1. Công thức nhân đôi của sin và cos

Từ các công thức cộng:

$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$;

$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$, ta có

Công thức nhân đôi:

$$\sin 2x=2\sin x.\cos x;$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$=2\cos^2 x-1$$
$$=1-2\sin^2 x.$$

Từ công thức nhân đôi của cos, ta có

Công thức hạ bậc:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};$$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

2. Công thức nhân đôi của tan

Từ công thức cộng $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}$, ta có:

Công thức nhân đôi:

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

Ví dụ 2: Tính các giá trị lượng giác của $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\tan 2a$ biết $\tan a=\dfrac{1}{3}\left(\pi<a<\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Cách giải:

Có $\pi<a<\dfrac{3\pi}{2}$ suy ra $\sin\alpha<0,\cos\alpha<0,\tan\alpha>0.$

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+\frac{1}{9}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{9}{10}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\Rightarrow\sin^2\alpha=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{-\sqrt{10}}{10}.$$

Áp dụng công thức nhân đôi, ta được:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha=2.\left(\frac{-\sqrt{10}}{10}\right).\left(\frac{-3\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{3}{5};$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{9}{10}-\frac{1}{10}=\frac{4}{5};$$

$$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{3}{4}.$$

III. BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)+\cos(x+y)\right];$$

$$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right];$$

$$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x-y)+\sin(x+y)\right].$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC bằng $\dfrac{BC^2\cdot\sin B\cdot\sin C}{2\cdot\sin A}$.

Áp dụng công thức đã chứng minh để tính diện tích tam giác ABC có $\hat{B}=75^\circ,\hat{C}=45^\circ,BC=12\text{cm}$.

Cách giải:

Diện tích tam giác ABC: $S=\frac{1}{2}AC.BC.\sin C$

Theo định lí sin: $\frac{\sin A}{BC}=\frac{\sin B}{AC}\Rightarrow AC=\frac{BC.\sin B}{\sin A}$, thay vào S ta được:

$S=\frac{1}{2}AC.BC.\sin C=\frac{1}{2}.\frac{BC.\sin B}{\sin A}.BC.\sin C=\frac{BC^2.\sin B.\sin C}{2.\sin A}$ (ĐPCM).

Xét tam giác ABC có $\hat{B}=75^\circ,\hat{C}=45^\circ,BC=12\text{cm}$:

$\sin B\cdot\sin C=\frac{1}{2}\left[\cos\left(30^\circ\right)-\cos\left(120^\circ\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right);$

$\sin A=\sin\left(180^\circ-A\right)=\sin(B+C)=\sin 120^o=\sin 60^o=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Diện tích tam giác ABC là $S=\frac{BC^2\cdot\sin B\cdot\sin C}{2\cdot\sin A}=\frac{12^2.\frac{1}{2}.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}}=36+12\sqrt{3}.$

IV. BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\sin x+\sin y=2\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x-\sin y=2\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x+\cos y=2\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x-\cos y=-2\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Cách nhớ:

"sin + sin = 2 sin cos;

sin – sin = 2 cos sin;

cos + cos = 2 cos cos;

cos – cos = -2 sin sin."

Ví dụ 3: Tính giá trị biểu thức sau: $\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{11\pi}{9}$

Cách giải:

Có $\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{11\pi}{9}=2\cos\frac{\frac{\pi}{9}+\frac{11\pi}{9}}{2}.\cos\frac{\frac{\pi}{9}-\frac{11\pi}{9}}{2}=2.\cos\frac{2\pi}{3}.\cos\frac{5\pi}{9}=-\cos\frac{5\pi}{9}$

Vậy $\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{11\pi}{9}=\cos\frac{5\pi}{9}-\cos\frac{5\pi}{9}=0.$

V. MỘT SỐ BÀI TOÁN VẬN DỤNG

Câu 1: Cho góc lượng giác α thỏa mãn $\tan\alpha=3$, khi đó

A. $\tan 2\alpha=\frac{-3}{4}$ **B.** $\cos^2\alpha=\frac{9}{10}$ **C.** $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{5}$ **D.** $\cot\alpha=-3$

Cách giải:

Có $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2.3}{1-9}=\frac{-3}{4}.$

Chọn A.

Câu 2: Cho hai góc lượng giác α,β: $\sin\alpha=\frac{5}{13}\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$, $\cos\beta=\frac{3}{5}\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right).$

Khi đó $\tan(\alpha-\beta)$ bằng?

Cách giải:

Có $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\Rightarrow\cos\alpha<0;\tan\alpha<0;\cot\alpha<0$ và

$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\Rightarrow\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}-1=\frac{144}{25}\Rightarrow\cot\alpha=-\frac{12}{5}\Rightarrow\tan\alpha=-\frac{5}{12}$

Có $0<\beta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\beta>0$ và

$1+\tan^2\beta=\frac{1}{\cos^2\beta}\Rightarrow\tan^2\beta=\frac{1}{\cos^2\beta}-1=\frac{16}{9}\Rightarrow\tan\beta=\frac{4}{3}$

Suy ra $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}=\frac{\frac{5}{12}-\frac{4}{3}}{1+\frac{5}{12}.\frac{4}{3}}=\frac{-63}{16}.$

Đáp án: $\frac{-63}{16}.$

Câu 3: Cho hai góc lượng giác α,β: $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\cos\beta=\frac{5}{12}$ $\left(0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}\right).$

Khi đó $\cos(\alpha+\beta)$ bằng?

Cách giải:

Vì $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha>0,\sin\beta>0.$

Có $\sin\alpha=\frac{8}{17}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{15}{17}$; $\cos\beta=\frac{5}{12}\Rightarrow\sin\beta=\frac{\sqrt{119}}{12}$

Áp dụng công thức cộng, có

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta=\frac{15}{17}.\frac{5}{12}-\frac{8}{17}.\frac{\sqrt{119}}{12}=\frac{75-8\sqrt{119}}{204}.$$

Đáp án: $\frac{75-8\sqrt{119}}{204}$.

Câu 4: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A=\cos B+\cos C\left(C<90^\circ\right)$. Khi đó độ lớn góc B bằng

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

Cách giải:

Ta có: $A+B+C=180^\circ\Rightarrow B+C=180^\circ-A$

$$\sin A=\cos B+\cos C=2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{190^\circ-A}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)=2\cos\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

Mặt khác, ta có $\sin A=2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}$.

Suy ra $\cos\frac{A}{2}=\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$

+) TH1: $\frac{A}{2}=\frac{B-C}{2}\Leftrightarrow A=B-C$

$\Rightarrow B-C+B+C=180^O$

$\Rightarrow B=90^o$

+) TH2: $\frac{A}{2}=-\frac{B-C}{2}\Leftrightarrow A=C-B$

$\Rightarrow -B+C+B+C=180^O$

$\Rightarrow C=90^o$ (Loại)

Vậy góc B bằng 90^o.

Chọn D.

Câu 5: Với điều kiện biểu thức có nghĩa, ta có

$$\frac{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\cot x-\sin x\cdot\cos x}=k\tan^2 x.$$

Khi đó giá trị của k bằng?

Cách giải:

Theo công thức $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$, có $2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}$

Suy ra $2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2x = 2\sin x \cos x..$

$$\cot x - \sin x \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} - \sin x.\cos x = \frac{\cos x - \sin^2 x.\cos x}{\sin x} = \frac{\cos x\left(1 - \sin^2 x\right)}{\sin x} = \frac{\cos^3 x}{\sin x}.$$

Suy ra $\frac{2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1}{\cot x - \sin x \cdot \cos x} = \frac{2\sin x \cos x}{\frac{\cos^3 x}{\sin x}} = 2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 2\tan^2 x.$

Vậy $k = 2.$

Đáp án: 2.