BÀI GIẢNG: PHÉP TÍNH LŨY THỪA, LOGARIT.
HÀM SỐ LŨY THỪA, MŨ, LOGARIT
CHUYÊN ĐỀ: HÀM SỐ LŨY THỪA, MŨ, LOGARIT
MÔN: TOÁN 12
GIÁO VIÊN: ĐOÀN NGOC DUY TRÌNH

MỤC TIÊU

- ✓ *Nắm được định nghĩa và tính chất của: phép tính lũy thừa, logarit; hàm số lũy thừa, mũ, logarit.*
- ✓ *Thực hiện được các phép toán cơ bản với lũy thừa và logarit.*
- ✓ *Vẽ được đồ thị của các hàm số: lũy thừa, mũ, logarit.*

I. PHÉP TÍNH LUỸ THỪA

1 Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho n là một số nguyên dương.

+ Với a là số thực tùy ý, lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số $a: a^n = a.a....a$ (n thừa số a).

+ Với $a \neq 0: a^0 = 1; a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

2 Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số hữu tỉ $\frac{m}{n}\left(m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2\right)$, với a là số thực dương tùy ý: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

3 Các tính chất của phép tính lũy thừa

Cho a, b là những số thực dương, m, n là những số thực tùy ý. Khi đó ta có:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

c) $\left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m = a^{m \cdot n}$;

d) $(a.b)^m = a^m \cdot b^m$;

e) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$;

f) $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$;

g) $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$;

h) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$;

i) $\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{n}{m}}$.

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{a^7 \cdot a^3}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m^2 + n^2 = 543$. **B.** $m^2 - n^2 = 312$. **C.** $m^2 - n^2 = -312$. **D.** $m^2 + n^2 = 409$.

Cách giải:

$$A=\frac{\sqrt[3]{a^7\cdot a^3}}{a^4\cdot\sqrt[7]{a^{-5}}}=\frac{a^{\frac{7}{3}}\cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4\cdot a^{-\frac{5}{7}}}=\frac{a^6}{a^{\frac{23}{7}}}=a^{\frac{19}{7}}$$

$\Rightarrow m=19, n=7$

$\Rightarrow m^2-n^2=312$

Chọn B.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Xét tổng $S=f\left(\frac{1}{2025}\right)+f\left(\frac{2}{2025}\right)+\ldots+f\left(\frac{2023}{2025}\right)+f\left(\frac{2024}{2025}\right)$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $S\geq 2023$. **B.** $1500<S<2023$. **C.** $500\leq S\leq 1500$. **D.** $S<500$.

Cách giải:

$$f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$$

$$f(1-x)=\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{\frac{4}{4^x}}{\frac{4}{4^x}+2}=\frac{4}{4^x}:\frac{4+2\cdot 4^x}{4^x}=\frac{4}{4+2\cdot 4^x}=\frac{2}{2+4^x}$$

$$\Rightarrow f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{2+4^x}=\frac{4^x+2}{4^x+2}=1$$

Có tất cả 2024 số hạng chia thành 1012 cặp

Vậy $S=1+1+\ldots+1=1012$

Chọn C.

II. PHÉP TÍNH LOGARIT

1 Định nghĩa

Cho hai số dương a,b với $a\neq 1$. Số n thỏa mãn đẳng thức $a^n=b$ được gọi là logarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$. Ta có: $n=\log_a b\Leftrightarrow a^n=b$.

Ví dụ: $\log_2 16=4$ vì $2^4=16$.

Chú ý:

- Không có logarit của số không dương.

- Logarit thập phân là logarit cơ số 10. Logarit cơ số thập phân của b kí hiệu là $\log_{10} b=\log b=\lg b$.

- Logarit tự nhiên là logarit cơ số e, trong đó $e=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Logarit cơ số tự nhiên của b kí hiệu là $\ln b$

2 Các tính chất của phép tính logarit

Cho a,b,c là những số thực dương, $a\neq 1$. Khi đó ta có:

a) $\log_a 1 = 0$;

b) $\log_a a = 1$;

c) $a^{\log_a b} = b$;

d) $\log_a a^b = b$;

e) $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$;

f) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;

g) $\log_a b^n = n \log_a b$;

h) $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$;

i) $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b$;

k) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$;

1) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$;

m) $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \log_a b$.

3 Một số ví dụ

Ví dụ 3: [Đề minh họa kỳ thi ĐGNL chuyên biệt Đại học Sư phạm TH. HCM năm 2025] Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Giá trị $\log_a \sqrt{a}$ bằng bao nhiêu?

A. 2. **B.** -2. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Cách giải:

$$\log_a \sqrt{a} = \log_a a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Chọn D.

Ví dụ 4: [Đề minh họa V - ACT năm 2025] Đặt $a = \log_{27} 5, b = \log_8 7, c = \log_2 3$. Khi đó $\log_{12} 35$ bằng

A. $\dfrac{3ac+3b}{c+1}$. **B.** $\dfrac{2ac+3b}{c+3}$. **C.** $\dfrac{3ac+3b}{c+2}$. **D.** $\dfrac{2ac+3b}{c+2}$.

Cách giải:

Sử dụng máy tính cầm tay:

$$\log_{27}(5) \to A \quad \log_8(7) \to B \quad \log_2(3) \to C \quad \Rightarrow \log_{12}(35) - \frac{3AC+3B}{C+2} = 0$$

Chọn C.

Ví dụ 5: [Đề chính thức đợt 1 V-ACT năm 2025] Cho số thực x thỏa mãn $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{2020} = 2025$.

Tính giá trị của biểu thức $\log_{2025}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

A. -1. **B.** $-\dfrac{1}{2025}$. **C.** $\dfrac{1}{2025}$. **D.** -2025.

Cách giải:

Ta có $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = x^2+1-x^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}-x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{2025}=2025\Rightarrow\sqrt{x^2+1}+x=2025^{\frac{1}{2025}}$

$\Rightarrow\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{1}{2025^{\frac{1}{2025}}}=2025^{\frac{-1}{2025}}$

$\Rightarrow\log_{2025}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\dfrac{-1}{2025}$

Chọn B.

III. HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

1 Hàm số lũy thừa

Cho số thực α. Khi đó hàm số $y=x^{\alpha}$ được gọi là hàm số lũy thừa với số mũ α.

Ví dụ: Các hàm số $y=x^5, y=x^{-2}\ldots$ được gọi là hàm số lũy thừa.

Tập xác định của hàm số $y=x^{\alpha}$ là:

$\mathbb{R}$ nếu α là số nguyên dương;

$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ nếu α là số nguyên âm;

$(0;+\infty)$ nếu α là số không nguyên.

Ví dụ 6: [Đề chính thức đợt 1 V - ACT năm 2025] Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-1\right)^{-3}$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$. **D.** $(-\infty;1)$.

Cách giải:

$\alpha=-3$ là số nguyên âm

$\Rightarrow x^2-1\neq0.\Leftrightarrow x\neq\pm1$

Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-1\right)^{-3}$ là $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$

Chọn C.

2 Hàm số mũ

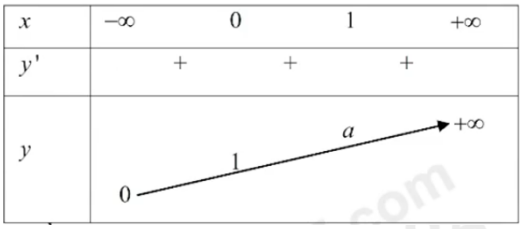
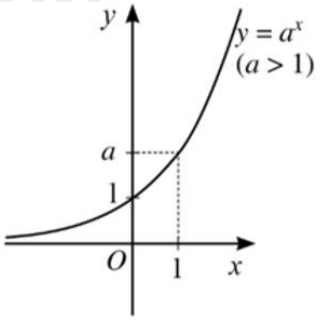
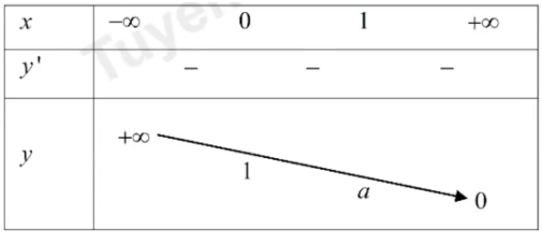
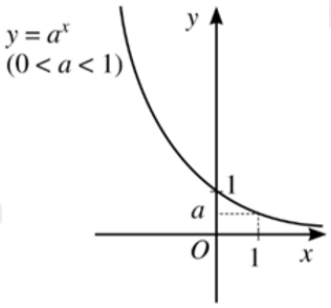
a. Định nghĩa

Cho số thực dương $a\neq1$. Khi đó hàm số $y=a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.

Ví dụ: Các hàm số $y=3^x, y=4^{-x}, y=(\sqrt{3})^x\ldots$ được gọi là hàm số mũ.

b. Khảo sát hàm số mũ $y=a^x(a>0,a\neq1)$

$y=a^x, a>1$	$y=a^x, 0<a<1$
1. Tập xác định: $\mathbb{R}$. Tập giá trị: $T=(0;+\infty)$. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.	1. Tập xác định: $\mathbb{R}$. Tập giá trị: $T=(0;+\infty)$. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0, \lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$. 3. Bảng biến thiên  4. Đồ thị Cắt trục tung tại điểm $(0;1)$, đi qua điểm $(1;a)$. Nằm phía trên trục hoành.  	2. Sự biến thiên Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} y=0$. 3. Bảng biến thiên  4. Đồ thị Cắt trục tung tại điểm $(0;1)$, đi qua điểm $(1;a)$. Nằm phía trên trục hoành. 

Ví dụ 7: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-x}$. **B.** $y=\left(\frac{e}{3}\right)^{x}$. **C.** $y=\frac{1}{5^x}$. **D.** $y=\left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^{x}$.

Cách giải:

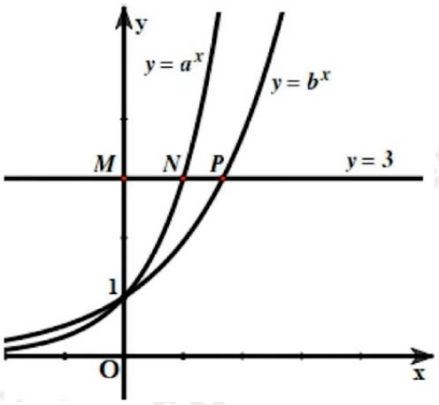
Xét phương án A: $y=\left(\frac{2}{x}\right)^{x}$ có $\frac{2}{\pi}<1 \Rightarrow$ Hàm nghịch biến

Xét phương án B: $y=\left(\frac{e}{3}\right)^{x}$ có $\frac{e}{3}<1 \Rightarrow$ Hàm nghịch biến

Xét phương án C: $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$ có $\frac{1}{5}<1 \Rightarrow$ Hàm nghịch biến

Chọn D.

Ví dụ 8: Cho các hàm số $y=a^x$ và $y=b^x$ có đồ thị như hình vẽ bên đưới.



Gọi M,N,P lần lượt là giao điểm của đường thẳng $y=3$ với trục tung, đồ thị hàm số $y=a^x$ và đồ thị hàm số $y=b^x$. Biết $2MN=3PN$, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a^2=b^3$. **B.** $2a=3b$. **C.** $a^3=b^5$. **D.** $3a=5b$.

Cách giải:

Ta có $2MN=3PN\Rightarrow\frac{MN}{3}=\frac{PN}{2}=\frac{MP}{5}\Rightarrow MN=\frac{3}{5}MP$

$\Rightarrow x_N=\frac{3}{5}x_P$

Có $y_N=y_P\Rightarrow a^{x_N}=b^{x_P}$

$\Rightarrow a^{\frac{3}{5}x_P}=b^{x_P}\Rightarrow\left(a^{\frac{3}{5}}\right)^{x_P}=b^{x_P}$

$\Rightarrow a^{\frac{3}{5}}=b\Rightarrow a^3=b^5$

Chọn C.

3 Hàm số logarit

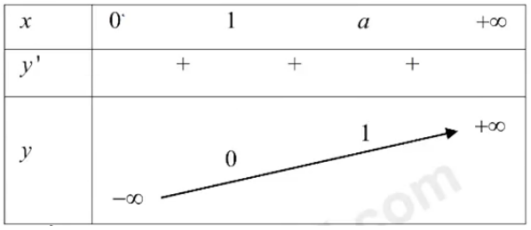
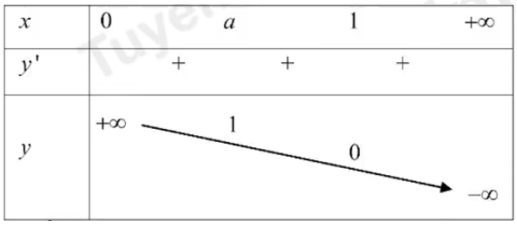
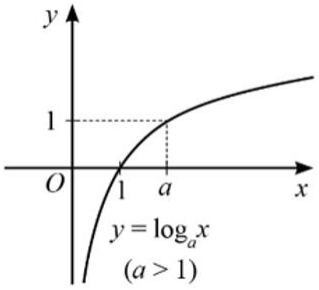
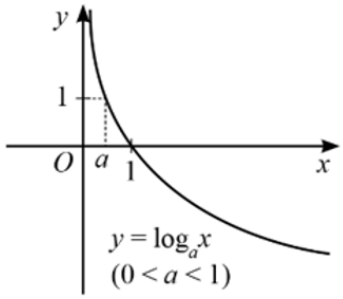
a. Định nghĩa

Cho số thực dương $a\neq1$. Khi đó hàm số $y=\log_a x$ được gọi là hàm logarit cơ số a.

Ví dụ: Các hàm số $y=\log_2 x, y=\log x, y=\ln x\ldots$ được gọi là hàm số logarit.

b. Khảo sát hàm số logarit $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$

$y=\log_a x, a>1$	$y=\log_a x, 0<a<1$
1. Tập xác định: $D=(0;+\infty)$. Tập giá trị: $T=\mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên $(0;+\infty)$. 2. Sự biến thiên Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to0^+}y=-\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$.	1. Tập xác định: $D=(0;+\infty)$. Tập giá trị: $T=\mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên $(0;+\infty)$. 2. Sự biến thiên Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$ Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to0^+}y=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}y=-\infty$.

3. Bảng biến thiên	3. Bảng biến thiên
	
4. Đồ thị	4. Đồ thị
	

Ví dụ 9: [Đề minh họa ĐGNL chuyên biệt Đại học Sư phạm TP. HCM năm 2021] Tập xác định của hàm số $y=\ln\left(9-x^2\right)$ có chứa bao nhiêu số nguyên?

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Cách giải:

$y=\ln\left(9-x^2\right)$ xác định khi $9-x^2>0$

$$x^2<9$$
$$-3<x<3$$

$D=(-3;3)$. Có 5 giá trị nguyên.

Chọn A.

Ví dụ 10: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln\left(x^2-2x-m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m\le 0$. **B.** $m<0$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m>2$.

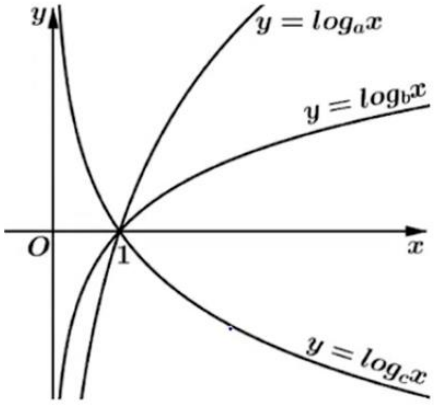
Cách giải:

$y=\ln\left(x^2-2x-m+1\right)$ xác định khi $x^2-2x-m+1>0, \forall x\in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \\ 4-4(-m+1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow 4+4m-4<0 \Leftrightarrow m<0$$

Chọn B.

Ví dụ 11: Cho ba số thực dương a,b,c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x, y=\log_b x, y=\log_c x$ được cho trong hình vẽ dưới đây:



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a < c < b$. **B.** $a < b < c$. **C.** $c < b < a$. **D.** $c < a < b$.

Cách giải:

$y = \log_a x$ với $a > 1$

$y = \log_b x$ với $b > 1$

$y = \log_c x$ với $0 < c < 1$

Vẽ đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$ lần lượt tại điểm có hoành độ là a, b, c

$\Rightarrow c < a < b$

Chọn D.