BÀI GIẢNG: GÓC TRONG KHÔNG GIAN
CHUYÊN ĐỀ: GÓC TRONG KHÔNG GIAN
MÔN: TOÁN 12
GIÁO VIÊN: ĐOÀN NGỌC DUY TRÌNH

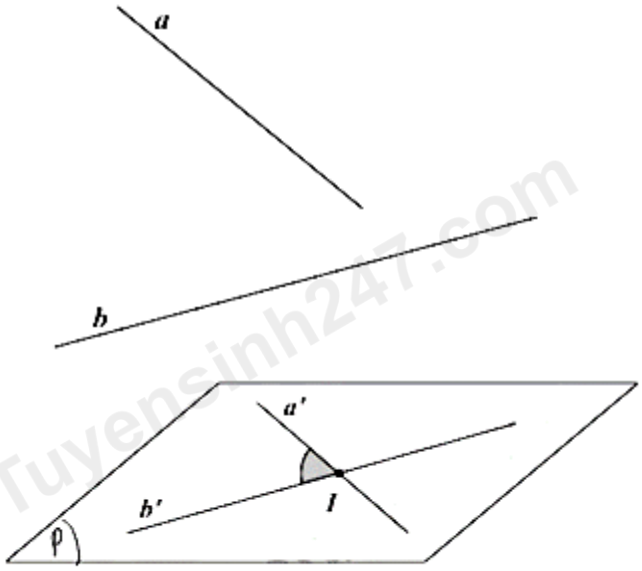
MỤC TIÊU

- ✓ *Góc giữa hai đường thẳng*
- ✓ *Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng*
- ✓ *Góc giữa hai mặt phẳng*
- ✓ *Góc nhị diện và góc phẳng nhị diện*

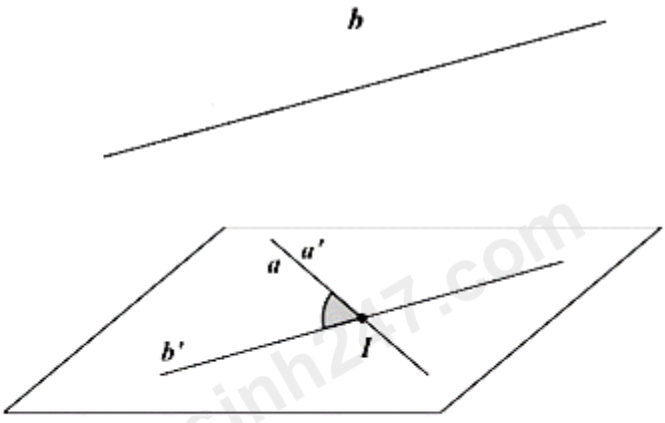
I. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

1 Định nghĩa góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng a,b trong không gian, kí hiệu (a,b), là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hình 1) hoặc trùng với a và b (hình 2).



Hình 1



Hình 2

Chú ý:

- Góc giữa hai đường thẳng nhận giá trị từ 0° đến 90°.
- Nếu góc giữa hai đường thẳng a và b bằng 90° thì hai đường thẳng a,b vuông góc với nhau, kí hiệu $a \perp b$ hoặc $b \perp a$.
- Hai đường thẳng vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau hoặc chéo nhau.

2 Bài toán tính góc giữa hai đường thẳng

Ví dụ 1: Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M là trung điểm AC. Góc giữa hai đường thẳng BM và CD xấp xỉ:

A. $38,2^0$. **B.** $73,2^0$. **C.** $141,8^0$. **D.** $106,8^0$.

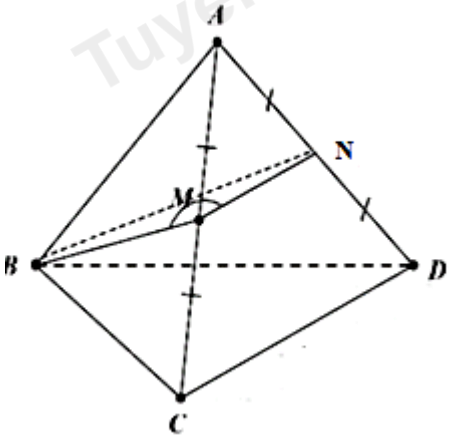
Cách giải:

N là trung điểm của AD

$\Rightarrow$ MN//CD

$(BM,CD)=(BM,MN)=\angle BMN$

$\cos BMN=\dfrac{BM^2+MN^2-BN^2}{2BM\cdot MN}$



Đặt $CD=a$

$MN=\dfrac{CD}{2}=\dfrac{a}{2}$;

$\Rightarrow BM=\dfrac{BC\cdot\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$BN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $\cos BMN=\dfrac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a}{2}}\Rightarrow$ BMN $\approx 73,2^\circ$.

Chọn B.

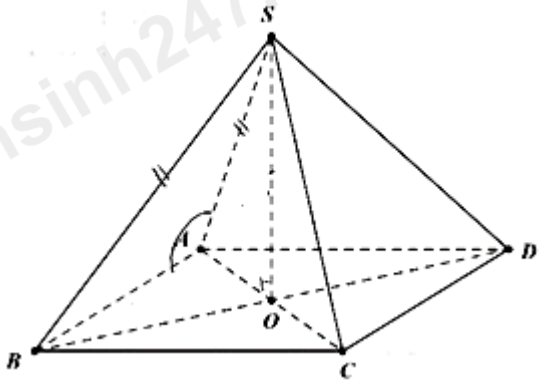
Ví dụ 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, chiều cao bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Góc giữa hai đường thẳng SA và CD xấp xỉ bằng

A. $49,1^0$. **B.** $63,2^0$. **C.** $72,8^0$. **D.** $56,5^0$.

Cách giải:

Vì $CD//AB\Rightarrow(SA,CD)=(SA,AB)=SAB$

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác SAO vuông tại O, ta được:



$SA=\sqrt{SO^2+AO^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{2a}{\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$

$\cos SAB=\dfrac{SA^2+AB^2-SB^2}{2\cdot SA\cdot AB}$

$=\dfrac{\left(\frac{a\sqrt{21}}{3}\right)^2+(2a)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2}{2\cdot\frac{a\sqrt{21}}{3}\cdot 2a}=\dfrac{17\sqrt{21}}{84}$

$\Rightarrow SAB\approx 49,1^\circ$

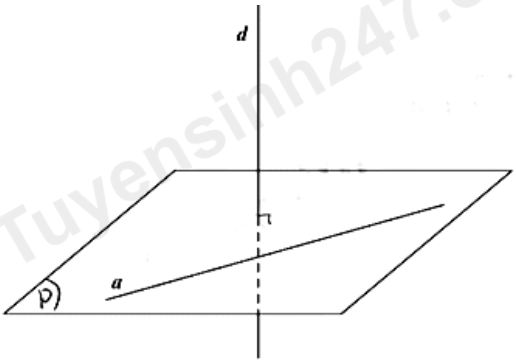
Chọn A.

II. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

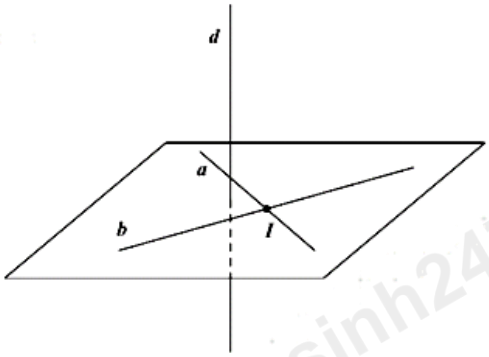
1 Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

a. Định nghĩa

Đường thẳng d gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong (P), kí hiệu là $d \perp (P)$ (Hình 3).



Hình 3



Hình 4

b. Dấu hiệu nhận biết

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì $d \perp (P)$ (Hình 4).

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với đáy. Gọi H, I lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD.

a) Chứng minh $AH \perp (SBC)$.

b) Gọi K là giao điểm của SC và (AHI). Chứng minh $AK \perp SC$.

Cách giải:

a) Ta có: $BC \perp AB$ ($ABCD$ là hình chữ nhật)

$BC \perp SA$ ($SA \perp (ABCD)$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$

Ta có: $AH \perp SB$ (H là hình chiếu của A trên SB)

$BC \perp AH$ ($BC \perp (SAB)$

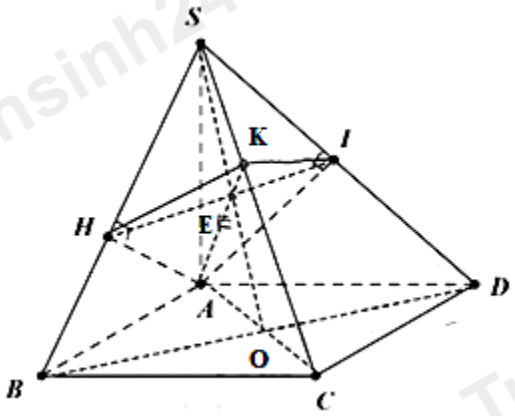
$\Rightarrow AH \perp (SBC)$.

b) Ta có: $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ (1)

Chứng minh tương tự câu a $\Rightarrow AI \perp (SCD) \Rightarrow AI \perp SC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SC \perp (AHI)$

Theo hình vẽ ta có: $AK \in (AHI)$



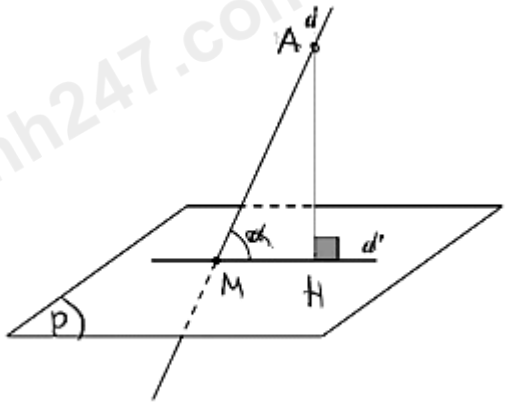
Vậy $SC \perp AK$ (dpcm)

2 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

a. Định nghĩa

Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng d và (P) bằng 90°.

Nếu đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa d và hình chiếu d' của d trên (P) là góc giữa đường thẳng d và (P), kí hiệu là $(d,(P))$ (Hình 5).



Hình 5

Chú ý:

- Góc α giữa đường thẳng và mặt phẳng nhận giá trị từ 0° đến 90°.
- Nếu đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) hoặc song song với mặt phẳng (P) thì $(d,(P)) = 0^0$.

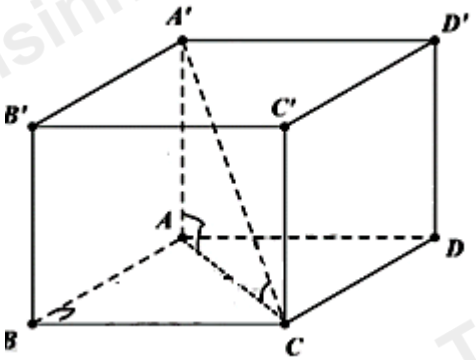
3 Bài toán tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Ví dụ 4: [Đề minh họa kỳ thi ĐGNL chuyên biệt Đại học Sư phạm TPHCM năm 2025] Cho khối hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AA' = a, AB = a, AD = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng bao nhiêu?

A. 30°. **B.** 45^0. **C.** 60°. **D.** 90°.

Cách giải:

Ta có: Hình chiếu $A'C$ trên $(ABCD)$ là AC.



$\Rightarrow \left(A'C,(ABCD)\right) = \left(A'C,AC\right) = ACA'$.

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác ABC vuông tại B, ta được:

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$

Xét $\Delta ACA'$ vuông tại A

$\Rightarrow \tan ACA' = \dfrac{AA'}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow ACA' = 30^\circ$

Chọn A.

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ đều $ABC\cdot A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $a, AA'=a\sqrt{2}$. Đường thẳng AB' tạo với mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ một góc có số đo bằng

A. 30°. **B.** 45^{0}. **C.** 60°. **D.** 90°.

Cách giải:

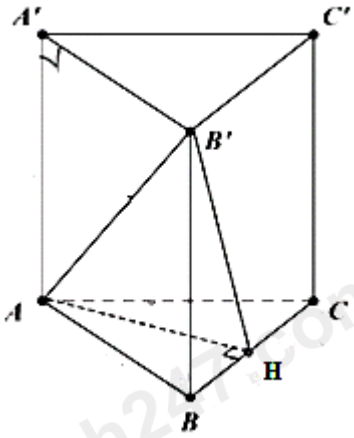
Gọi AH là đường cao của tam giác ABC

$\Rightarrow AH\perp BC$

$AH\perp BB'$ (vì $BB'\perp(ABC)$)

$\Rightarrow AH\perp\left(BCC'B'\right)$

$\Rightarrow\left(AB',\left(BCC'B'\right)\right)=\left(AB',HB'\right)=AB'H.$



Ta có: $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; AB'=\sqrt{(a\sqrt{2})^2+a^2}=a\sqrt{3}$

Xét $\Delta AB'H$ vuông tại H (do $AH\perp\left(BCC'B'\right)$)

$\Rightarrow \sin AB'H=\dfrac{AH}{AB'}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$

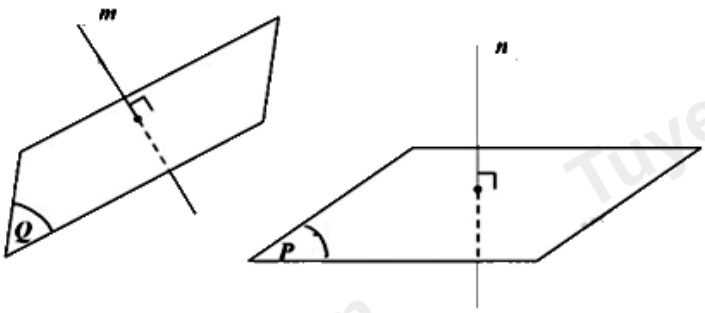
$\Rightarrow \mathrm{AB}'H=30^{\circ}$

Chọn A.

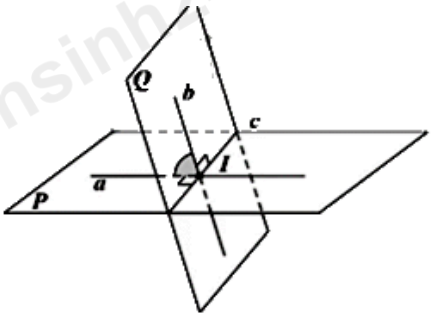
III. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

1 Định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng

Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q), kí hiệu là $((P),(Q))$ (Hình 6).



Hình 6



Hình 7

Chú ý:

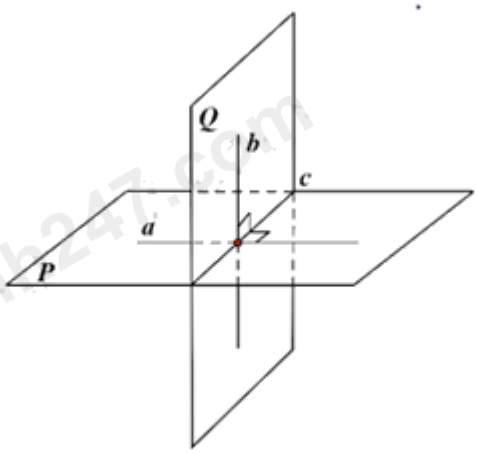
- Góc giữa hai mặt phẳng nhận giá trị từ 0° đến 90°.
- Góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau là góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng đó và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng đó (Hình 7).

2 Hai mặt phẳng vuông góc

a. Định nghĩa

Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc nếu góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 90°.

Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau được kí hiệu là $(P) \perp (Q)$ (Hình 8).



Hình 8

b. Tính chất

- Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
- Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
- Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

Ví dụ 6: [Đề minh họa kỳ thi ĐGNL chuyên biệt Đại học Sư phạm TPHCM năm 2025] Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC), tam giác ABC vuông tại B. Phương án nào dưới đây sai?

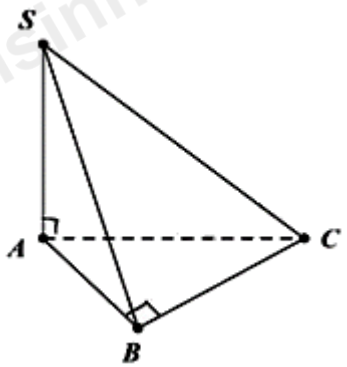
A. (SAB) vuông góc với (ABC).

B. (SAC) vuông góc với (ABC).

C. (SAB) vuông góc với (SBC).

D. (SBC) vuông góc với (ABC).

Cách giải:



Ta có: $SA \in (SAB)$

Mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC) \rightarrow$ A. Đúng

Tương tự $\Rightarrow (SAC) \perp (ABC) \rightarrow$ B. Đúng

Ta có: $BC \in (SBC)$

Mà $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB) \rightarrow$ C. Đúng

Chọn D.

Ví dụ 7: [Đề tham khảo kỳ thi tốt nghiệp THPT từ năm 2025] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$?

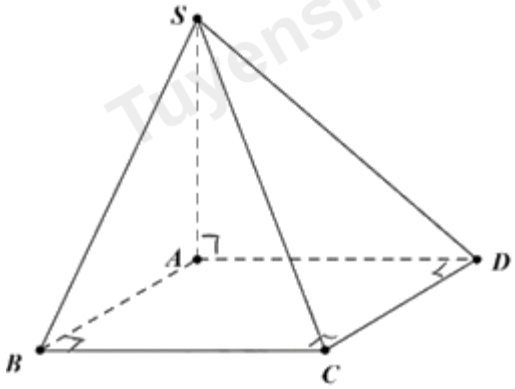
A. (SAB). **B.** (SBC). **C.** (SCD). **D.** (SBD).

Cách giải:

Ta có: $SA \perp (ABCD)$

Mà $SA \in (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (ABCD)$

Chọn A.



3 Bài toán tính góc giữa hai mặt phẳng

Ví dụ 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a, AC = a\sqrt{7}$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng

A. 30°. **B.** 45^0. **C.** 60°. **D.** 90°.

Cách giải:

Ta có: $(SCD) \cap (ABCD)) = CD$

Theo hình vẽ ta có:

$HK \subset (ABCD) \Rightarrow HK \perp CD$

$SK \subset (SCD), SK \perp CD$

$\Rightarrow$ ((SCD),(ABCD))=(SK,HK)=SKH .

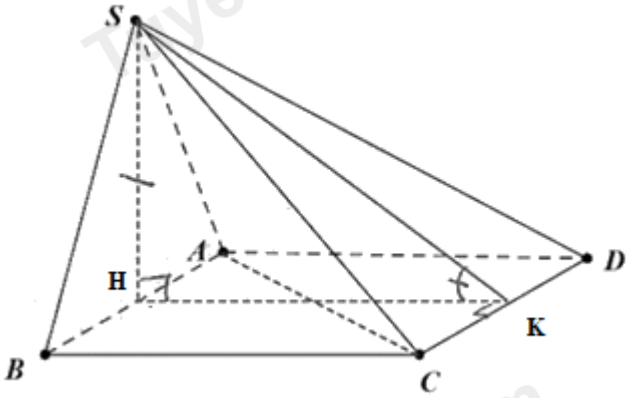
Xét ΔABC vuông tại B, ta được:

$HK = BC = \sqrt{(a\sqrt{7})^2 - (2a)^2} = a\sqrt{3}.$

SAB là tam giác đều $\Rightarrow SH = \dfrac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$

$\Rightarrow \Delta SHK$ là tam giác vuông cân tại H

$\Rightarrow SKH = 45^\circ.$



Chọn B.

Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, hai mặt bên (SAB) và (SAC) đồng thời vuông góc với đáy. Biết $AD = 2AB = 2BC = 2a, SA = a$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là

A. 30°. **B.** 45^0. **C.** 60°. **D.** 90°.

Cách giải:

Gọi AH là đường cao của tam giác SAB

$\Rightarrow AH = \dfrac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có: $BC \perp AB; BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp AH$

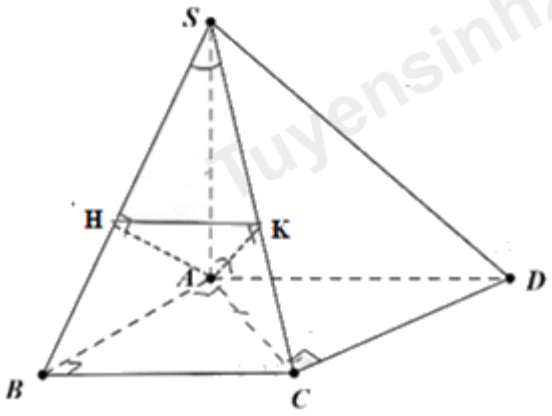
Mà $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)\,(1)$

Gọi AK là đường cao tam giác SAC

Ta có: $(SAC) \perp (ABCD) \Rightarrow AK \perp CD$

$\Rightarrow AK \perp (SCD)\,(2)$

$$\Rightarrow AK = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$



Từ (1) và (2) $\Rightarrow ((\text{SBC}),(\text{SCD})) = (AH, AK) = HAK$

$$SH = \frac{SA^2}{SB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; SK = \frac{SA^2}{SC} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\cos BSC = \frac{BC}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\Rightarrow HK = \sqrt{SH^2 + SK^2 - 2SH.SK.\cos BSC} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\cos HAK = \frac{AH^2 + AK^2 - HK^2}{2AH \cdot AK} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow HAK = 30^\circ.$

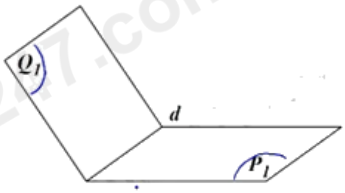
Chọn A.

IV. GÓC NHỊ DIỆN VÀ GÓC PHẲNG NHỊ DIỆN

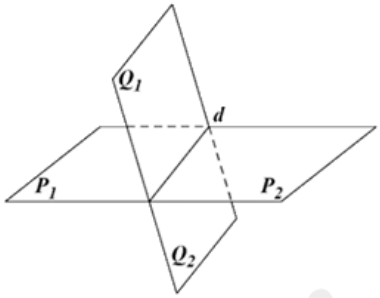
1 Định nghĩa góc nhị diện

Cho hai nửa mặt phẳng (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d. Hình gồm $(P_1),(Q_1)$ và d được gọi là góc nhị diện tạo bởi (P_1) và (Q_1), kí hiệu $[P_1, d, Q_1]$ (Hình 9).

Hai nửa mặt phẳng $(P_1),(Q_1)$ gọi là hai mặt của nhị diện và d gọi là cạnh của nhị diện.



Hình 9



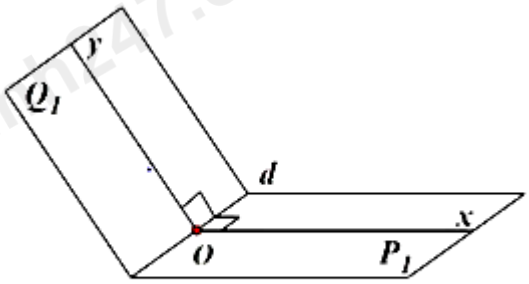
Hình 10

Chú ý:

- Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d tạo thành bốn góc nhị diện (Hình 10)
- Góc nhị diện $[P_1, d, Q_1]$ còn được kí hiệu là $[M, d, N]$, trong đó M, N là các điểm thuộc lần lượt thuộc (P_1) và (Q_1).

2 Định nghĩa góc phẳng nhị diện

Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.



Hình 11

Chú ý:

- Số đo góc phẳng nhị diện được gọi là số đo góc nhị diện.
- Số đo góc nhị diện nhận giá trị từ 0° đến 180°.

3 Bài toán tính số đo góc nhị diện

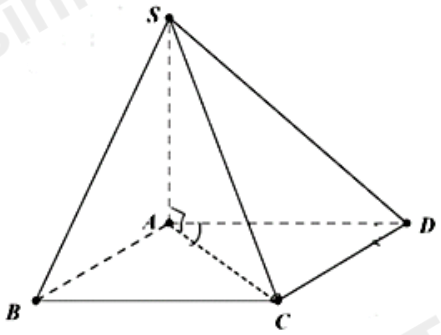
Ví dụ 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AC = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$, tính số đo góc nhị diện $[C, SA, D]$.

A. 30°. **B.** 45^0. **C.** 60°. **D.** 75°.

Cách giải:

Ta có:

$$\begin{cases} AC \perp SA \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow [C, SA, D] = CAD$$



Xét ΔCAD vuông tại D

$$\sin CAD = \frac{CD}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow CAD = 30^\circ$$

Vậy $[C, SA, D] = 30^\circ$

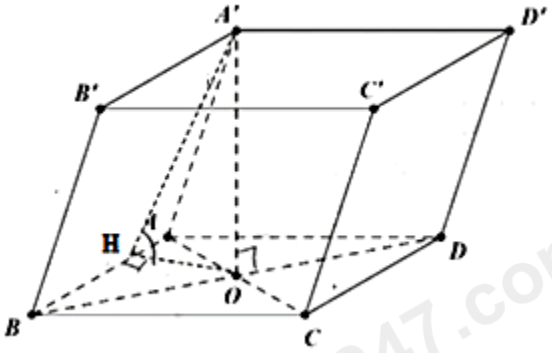
Chọn A.

Ví dụ 11: Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$, cạnh bên bằng $2a$, đáy $ABCD$ là hình thoi có $AB=AC=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với điểm O là giao điểm của AC và BD. Số đo góc nhị diện $\left[C',CD,O\right]$ xấp xỉ bằng

A. $54,7^0$. **B.** $125,3^0$. **C.** $63,4^0$. **D.** $116,6^0$.

Cách giải:

Ta có: $AB=BC=AC=2a\Rightarrow \Delta ABC$ đều



$\Rightarrow BO=2a\dfrac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}.$

Ta có: $\left(CDD'C'\right)//\left(ABB'A'\right)$

Mà $(CDAB)\cap(ABB'C')=AB$

$\begin{cases}AB\perp OH\\AB\perp A'O\end{cases}\Rightarrow AB\perp\left(A'HO\right).$

$\Rightarrow\left[A',AB,O\right]=A'HO.$

Ta có: $A'O=\sqrt{A'A^2-AO^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=a\sqrt{3}.$

$OH=AO\cdot\sin HAO=a\cdot\sin 60^\circ=a\sqrt{3}$

Xét $\Delta A'HO$ vuông tại O $\Rightarrow \tan A'HO=\dfrac{A'O}{OH}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}=2$

$\Rightarrow A'HO=63,4^\circ.$

Vậy $\left[C',CD,O\right]=116,6^\circ$

Chọn D.