BÀI GIẢNG: CĂN BẬC HAI
CHUYÊN ĐỀ: CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA
MÔN: TOÁN 9 NÂNG CAO
GIÁO VIÊN: NGUYỄN THỊ YẾN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Căn bậc hai số học

- Căn bậc hai của một số không âm a là số x sao cho $x^2 = a$
- Số dương a có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau:

  Số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$, số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$
- Số 0 có đúng một căn bậc hai là chính số 0, ta viết $\sqrt{0} = 0$
- Với số dương a, số $\sqrt{a}$ được gọi là căn bậc hai số học của a. Số 0 gọi là căn bậc hai số học của 0

  Với hai số không âm a, b, ta có $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

2 Căn thức bậc hai

Với A là một biểu thức đại số, ta gọi $\sqrt{A}$ là căn thức bậc hai của A.

$\sqrt{A}$ xác định (hay có nghĩa) khi $A \geq 0$.

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & khi\ A \geq 0 \\ -A & khi\ A < 0 \end{cases}$$

B. BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm điều kiện để biểu thức chứa căn có nghĩa

Bài 1: Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa.

a) $\sqrt{-3x+2}$ b) $\sqrt{9x-2}$ c) $\frac{x}{x^2-4} + \sqrt{x-2}$ d) $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$

Bài 2: Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{9x^2-6x+1}$ (1) b) $\sqrt{-x^2+2x-1}$ (2) c) $\sqrt{-|x+5|}$ (3)

d) $\sqrt{-2x^2-1}$ (4) e) $\sqrt{4-x^2}$ (5) f) $\sqrt{x^2-5x+6}$ (6)

Dạng 2. Thực hiện phép tính.

Bài 3: Thực hiện các phép tính sau:

a) $-0,8\sqrt{(-0,125)^2}$ b) $\sqrt{(-2)^6}$ c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ d) $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}$

Bài 4: Thực hiện các phép tính sau:

a) $A=\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$

b) $B=\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2}-\sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$

c) $C=\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

d) $D=\sqrt{7-2\sqrt{10}}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}$

Dạng 3. Rút gọn biểu thức

Bài 5: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A=x+3+\sqrt{x^2-6x+9}\,(x\le 3)$

b) $B=\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2}\,(-2\le x\le 0)$

c) $C=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}(x>1)$

d) $D=|x-2|+\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}(x<2)$

Dạng 4. So sánh

Bài 6: So sánh các số sau:

a) $\sqrt{3\sqrt{2}}$ và $\sqrt{2\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{10}+\sqrt{5}+1$ và $\sqrt{35}$

c) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ và 2

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng 1: Tìm điều kiện để biểu thức chứa căn có nghĩa

Bài 1: Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa.

a) $\sqrt{-3x+2}$

b) $\sqrt{9x-2}$

c) $\dfrac{x}{x^2-4}+\sqrt{x-2}$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{3-2x}}$

Cách giải:

a) ĐKXĐ: $-3x+2\ge 0\Leftrightarrow x\le\dfrac{2}{3}$

b) ĐKXĐ: $9x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge\dfrac{2}{9}$

c) ĐKXĐ: $\begin{cases}x^2-4\ne 0\\ x-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne\pm 2\\ x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow x>2$

d) ĐKXĐ: $3-2x>0\Leftrightarrow x<\dfrac{3}{2}$

Bài 2: Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{9x^2-6x+1}$ (1)

b) $\sqrt{-x^2+2x-1}$ (2)

c) $\sqrt{-|x+5|}$ (3)

d) $\sqrt{-2x^2-1}$ (4)

e) $\sqrt{4-x^2}$ (5)

f) $\sqrt{x^2-5x+6}$ (6)

Cách giải:

a) ĐKXĐ: $9x^2-6x+1\ge 0\Leftrightarrow(3x-1)^2\ge 0\ (\forall x)$

Vậy $\forall x\in\mathbb{R}$ thì (1) luôn có nghĩa.

b) $-x^2+2x-1\ge 0\Leftrightarrow -(x-1)^2\ge 0\Leftrightarrow x=1$

Vậy $x=1$ thì (2) có nghĩa.

c) ĐKXĐ: $-|x+5|\ge 0\Leftrightarrow |x+5|\le 0\Leftrightarrow |x+5|=0\Leftrightarrow x=-5$

Vậy $x=-5$ thì (3) có nghĩa.

d) ĐKXĐ: $-2x^2-1\ge 0$

Có: $-2x^2\le 0,\forall x\Leftrightarrow -2x^2-1\le -1<0,\forall x$

$\Rightarrow$ (4) luôn không xác định $\forall x$

e) ĐKXĐ: $4-x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2\le 4\Leftrightarrow -2\le x\le 2$

Vậy $-2\le x\le 2$ thì (5) xác định.

f) ĐKXĐ: $x^2-5x+6\ge 0\Leftrightarrow (x-2)(x-3)\ge 0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 3\\ x\le 2\end{array}\right.$

Vậy $x\ge 3$ hoặc $x\le 2$ thì (6) xác định.

Dạng 2. Thực hiện phép tính.

Bài 3: Thực hiện các phép tính sau:

a) $-0,8\sqrt{(-0,125)^2}$ b) $\sqrt{(-2)^6}$ c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ d) $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}$

Cách giải:

a) $-0,8.\sqrt{(-0,125)^2}=(-0,8).|-0,125|=(-0,8).0,125=-0,1$

b) $\sqrt{(-2)^6}=\sqrt{(-8)^2}=|-8|=8$

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=|\sqrt{3}-2|=-\sqrt{3}+2$ (vì $\sqrt{3}<\sqrt{4}=2$ nên $\sqrt{3}-2<0$)

d) $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}=|2\sqrt{2}-3|=-2\sqrt{2}+3$ (vì $2\sqrt{2}=\sqrt{8}<\sqrt{9}=3$ nên $2\sqrt{2}-3<0$)

Bài 4: Thực hiện các phép tính sau:

a) $A=\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$ b) $B=\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2}-\sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$

c) $C=\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ d) $D=\sqrt{7-2\sqrt{10}}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}$

Cách giải:

a) $A=\left|\underbrace{3-2\sqrt{2}}_{>0}\right|+\left|\underbrace{3+2\sqrt{2}}_{>0}\right|=3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}=6$

b) $B=\left|\underbrace{5-2\sqrt{6}}_{>0}\right|-\left|\underbrace{5+2\sqrt{6}}_{>0}\right|=5-2\sqrt{6}-5-2\sqrt{6}=-4\sqrt{6}$

c) $C=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=|\sqrt{3}+\sqrt{2}|-|\sqrt{3}-\sqrt{2}|=\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

d) $D=\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}-\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2}=|\sqrt{2}-\sqrt{5}|-|\sqrt{2}+\sqrt{5}|=-\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{5}=-2\sqrt{2}$

Dạng 3. Rút gọn biểu thức

Bài 5: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = x + 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9}\,(x \le 3)$

b) $B = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2}\,(-2 \le x \le 0)$

c) $C = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}(x > 1)$

d) $D = |x - 2| + \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}(x < 2)$

Cách giải:

a) $A = x + 3 + \sqrt{(x-3)^2} = x + 3 + |x - 3| = x + 3 - x + 3 = 6$ (vì $x \le 3$ nên $x - 3 \le 0 \Rightarrow |x - 3| = -x + 3$)

b) $B = \sqrt{(x+2)^2} - \sqrt{x^2} = |x + 2| - |x| = x + 2 + x = 2x + 2$ (vì $-2 \le x \le 0 \Rightarrow x + 2 \ge 0$)

c) $C = \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} = \dfrac{|x-1|}{x-1} = \dfrac{x-1}{x-1} = 1$ (vì $x > 1$ nên $x - 1 > 0 \Rightarrow |x - 1| = x - 1$)

d) $D = |x - 2| + \dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} = |x - 2| + \dfrac{|x-2|}{x-2} = -x + 2 + \dfrac{-(x-2)}{x-2} = -x + 2 + (-1) = -x + 1$

(vì $x < 2$ nên $x - 2 < 0 \Rightarrow |x - 2| = -x + 2$)

Dạng 4. So sánh

Bài 6: So sánh các số sau:

a) $\sqrt{3\sqrt{2}}$ và $\sqrt{2\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{10} + \sqrt{5} + 1$ và $\sqrt{35}$

c) $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ và 2

Cách giải:

a) Ta có: $3\sqrt{2} = \sqrt{9}.\sqrt{2} = \sqrt{18}$

$2\sqrt{3} = \sqrt{4}.\sqrt{3} = \sqrt{12}$

Vì $18 > 12 \Rightarrow \sqrt{18} > \sqrt{12}$

$\Rightarrow \sqrt{18} > \sqrt{12}$

$\Rightarrow \sqrt{\sqrt{18}} > \sqrt{\sqrt{12}}$

hay $\sqrt{3\sqrt{2}} > \sqrt{2\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{10} + \sqrt{5} + 1 > \sqrt{9} + \sqrt{4} + 1 = 3 + 2 + 1 = 6$

Vậy $\sqrt{10} + \sqrt{5} + 1 > \sqrt{35}$

c) $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} < \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}} = \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$

Vậy $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} < 2$